Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF

Estructuras Algebraicas (2014)
Práctico 5

1. *a*) Sea $(G, +)$ un grupo abeliano. Definimos la siguiente operación en G: $a \cdot b = 0$, para todo a, $b \in G$. Probar que $(G, +, \cdot)$ es un anillo.

   b) Sea U un conjunto no vacío. Sea S el conjunto de todos los subconjuntos de U. Para A, $B \in S$ definimos:

$$A + B := (A - B) \cup (B - A) \qquad \text{y} \qquad AB := A \cap B.$$

   Entonces S es un anillo. ¿Es conmutativo? ¿Tiene identidad?

2. Un *anillo de Boole* es un anillo R tal que $a^2 = a$, para todo $a \in R$. Probar que todo anillo de Boole es conmutativo y $a + a = 0$, para todo $a \in R$.

3. Sea R anillo finito con más de un elemento y sin divisores de cero. Probar que R es un anillo de división.

4. Sea R un anillo con más de un elemento. Supongamos que para todo $a \in R$, con $a \neq 0$, existe un único $b \in R$ tal que $aba = a$. Probar que

   a) R no tiene divisores de cero.

   b) $bab = b$.

   c) R tiene una identidad.

   d) R es un anillo de división.

5. Sea R un anillo y denotemos por $\mathrm{char}(R)$ la característica de R. Supongamos que R tiene identidad 1_R. Probar las siguientes afirmaciones.

   a) Si $\mathrm{char}(R) = n$, con $n > 0$, entonces $n = \min\{j \in \mathbb{N} : j{,}1_R = 0\}$.

   b) Si R no tiene divisores de cero, entonces $\mathrm{char}(R)$ es primo.

6. Sea R un anillo conmutativo con identidad y $\mathrm{char}(R) = p$, con p primo. Probar que $(a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n}$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a, $b \in R$.

7. Sea R un anillo conmutativo y a, $b \in R$ elementos nilpotentes. Probar que $a + b$ es nilpotente. Mostrar que este resultado puede ser falso si R no es conmutativo.

8. Sea R un anillo. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

   a) R no tiene elementos nilpotentes distintos de cero.

   b) si $a \in R$ y $a^2 = 0$, entonces $a = 0$.

9. *a*) Dar un ejemplo de un homomorfismo de anillos no nulo $f : R \to S$, con R y S anillos con identidad, tal que $f(1_R) \neq 1_S$.

   b) Sea $f : R \to S$ un epimorfismo de anillos con identidad. Probar que $f(1_R) = 1_S$.

c) Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos con identidad y u una unidad en R tal que $f(u)$ es una unidad en S. Probar que $f(1_R) = 1_S$ y $f(u^{-1}) = f(u)^{-1}$.

10. Determinar todos los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Z}_6$ en $\mathbb{Z}_6$, y de Z_{20} en Z_{30}. ¿Qué puede decir en general sobre los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Z}_m$ en $\mathbb{Z}_n$

11. El conjunto de todos los elementos nilpotentes en un anillo conmutativo es un ideal.

12. Sea R un anillo y $a \in R$. Mostrar que $J := \{r \in R : ra = 0\}$ es un ideal a izquierda de R y que $K := \{r \in R : ar = 0\}$ es un ideal a derecha de R.

13. Sea I un ideal en un anillo R. Definimos $[R : I] := \{r \in R : xr \in I, \text{ para todo } x \in R\}$. Probar que $[R : I]$ es un ideal en R que contiene a I.

14. Sea S el anillo de todas las matrices 2×2 sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Probar que:

    a) el centro de S son las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
    b) el centro de S no es un ideal en S.
    c) Calcular el centro del anillo de matrices $n \times n$ sobre un anillo de división.

15. Probar las siguientes afirmaciones.

    a) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_n$ son anillos de ideales principales.
    b) Si R es anillo de ideales principales y $f : R \to S$ es un homomorfismo de anillos suryectivo, entonces S es anillo de ideales principales.

16. Sea R un anillo conmutativo y N el ideal de todos los elementos nilpotentes. Demostrar que R/N es un anillo sin elementos nilpotentes excepto el elemento nulo.

17. Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos, I ideal en R y J ideal en S.

    a) Probar que $f^{-1}(J)$ es un ideal en R que contiene a $\ker f$.
    b) Si f es epimorfismo, entonces $f(I)$ es un ideal en S. ¿Sería esto cierto si no se pide que f sea epimorfismo?

18. Sea R un anillo conmutativo con identidad. Definimos $A := \{r \in R : r \text{ es divisor de cero}\} \cup \{0\}$. Probar que A contiene al menos un ideal primo.

19. Sea $f : R \to S$ un epimorfismo de anillos. Probar las siguientes afirmaciones.

    a) Si P es ideal primo en R y $\ker f \subseteq P$, entonces $f(P)$ es un ideal primo en S.
    b) Si Q es ideal primo en S, entonces $f^{-1}(Q)$ es un ideal primo en R y $\ker f \subseteq f^{-1}(Q)$.
    c) Existe una correspondencia 1-1 entre el conjunto de todos los ideales primos en R que contienen a $\ker f$ y el conjunto de todos los ideales primos en S, dada por $P \mapsto f(P)$.
    d) Sea I un ideal (resp. ideal primo) en R. Cada ideal (resp. ideal primo) en R/I es de la forma J/I, donde J es un ideal (resp. ideal primo) en R que contiene a I.

20. Sea I un ideal en $\mathbb{Z}$, con $I \neq 0$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

    a) I es primo.
    b) I es maximal.
    c) $I = (p)$, con p primo.

21. Determinar todos los anillos primos y todos los anillos maximales en $\mathbb{Z}_m$.

22. Sea R el anillo (conmutativo con unidad) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donde la suma y el producto están dados *componente a componente*, y sea $I := \{(n, 0) : n \in \mathbb{Z}\}$. Pruebe que I es un ideal de R el cual es un ideal primo pero no es un ideal maximal.