Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF

Estructuras Algebraicas (2014)
Práctico 6

1. Sean R un Dominio de Ideales Principales e I un ideal en R distinto de cero. Probar que I es maximal si y sólo si I es primo.

2. Sea $R := \{a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Probar las siguientes afirmaciones.

   a) R es subanillo de $\mathbb{R}$.

   b) La función $N : R \to \mathbb{Z}$ dada por $N(a + b\sqrt{10}) := a^2 - 10b^2$ satisface $N(uv) = N(u)N(v)$, para todo $u, v \in R$.

   c) $N(u) = 0$ si y sólo si $u = 0$.

   d) u es una unidad en R si y sólo si $N(u) = \pm 1$.

   e) 2, 3, $4 + \sqrt{10}$ y $4 - \sqrt{10}$ son elementos irreducibles de R.

   f) 2, 3, $4 + \sqrt{10}$ y $4 - \sqrt{10}$ no son elementos primos de R.

3. *a)* Si $a, n \in \mathbb{Z}$, con $n > 0$, entonces existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = qn + r$, donde $|r| \leq n/2$.

   b) Los enteros Gaussianos $\mathbb{Z}[i]$ forman un dominio euclidiano con $\varphi(a + bi) = a^2 + b^2$.

4. Determine todas las unidades en el anillo de enteros Gaussianos $\mathbb{Z}[i]$.

5. Calcular el máximo común divisor de $11 + 7i$ y $18 - i$ en $\mathbb{Z}[i]$.

6. Sea R un dominio de factorización única (DFU), $d \in R$, $d \neq 0$. Probar que existe sólo un número finito de ideales principales distintos que contienen al ideal (d).

7. Si R es un dominio de factorización única, $a, b \in R$ *coprimos* (i. e. el máximo común divisor de a y b es una unidad) y $a|bc$, entonces $a|c$.

8. Sea (R, φ) dominio euclidiano (DE), $a \in R$. Probar que a es unidad en R si y sólo si $\varphi(a) = \varphi(1_R)$.

9. (Algoritmo euclidiano). Sea (R, φ) un dominio euclidiano (DE). Sean $a, b \in R$, con $b \neq 0$. Usando sucesivamente la propiedad (ii) de la definición de anillo euclidiano[1] se tiene:

$$
\begin{array}{rclcl}
a = q_0 b + r_1 & \text{con} & r_1 = 0 & \text{ó} & \varphi(r_1) < \varphi(b); \\
b = q_1 r_1 + r_2 & \text{con} & r_2 = 0 & \text{ó} & \varphi(r_2) < \varphi(r_1); \\
r_1 = q_2 r_2 + r_3 & \text{con} & r_3 = 0 & \text{ó} & \varphi(r_3) < \varphi(r_2); \\
\vdots & & & & \\
r_k = q_{k+1} r_{k+1} + r_{k+2} & \text{con} & r_{k+2} = 0 & \text{ó} & \varphi(r_{k+2}) < \varphi(r_{k+1}); \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

Sea $r_0 = b$ y sea n el mínimo entero tal que $r_{n+1} = 0$ (un tal n existe pues $(\varphi(r_k))_k$ forma una sucesión estrictamente decreciente de enteros no negativos). Probar que r_n es el máximo común divisor de a y b.

[1] Hungerford, Def. III.3.8, pag. 139.

10. Sea R anillo conmutativo con identidad. Si $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ es un divisor de cero en $R[x]$, entonces existe $b \in R$, $b \neq 0$, tal que $ba_n = ba_{n-1} = \cdots = ba_0 = 0$.

11. Sea $\mathbb{F}$ cuerpo. Probar que (x) es un ideal maximal en $\mathbb{F}[x]$.

12.
    a) Si D es un dominio íntegro y c es un elemento irreducible en D, entonces $D[x]$ no es un dominio de ideales principales (DIP).
    b) Mostrar que $\mathbb{Z}[x]$ no es un dominio de ideales principales.
    c) Sea $\mathbb{F}$ cuerpo y $n \in \mathbb{Z}$, con $n \geq 2$. Probar que $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ no es un dominio de ideales principales. [Ayuda: mostrar que x_1 es irreducible en $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$].

13. Sean R anillo conmutativo con identidad y $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in R[x]$. Probar que f es unidad en $R[x]$ si y sólo si a_0 es unidad en R y $a_1, \ldots, a_n$ son elementos nilpotentes de R.

14. Sean D un dominio íntegro y c_j, $d_j \in D$, $0 \leq j \leq n$, con $c_0, \ldots, c_n$ distintos entre sí. Probar que existe a lo sumo un polinomio $f \in D[x]$ de grado $n+1$ tal que $f(c_j) = d_j$, $0 \leq j \leq n$.

15. Pruebe que:
    a) DE $\Rightarrow$ DIP con identidad.
    b) DIP $\Rightarrow$ DFU.

    Dar contraejemplos que muestren que las recíprocas no son ciertas.

16. Describir los siguientes anillos.
    a) $\mathbb{Z}[x]/(2, x)$.
    b) $\mathbb{Z}[x]/(2x)$.
    c) $\mathbb{Z}[i]/(i)$.
    d) $\mathbb{Z}[i]/(1+i)$.

17.
    a) Sea R el anillo de todas las matrices 2×2 sobre $\mathbb{Z}$. Probar que, para todo $A \in R$, $(x+A)(x-A) = x^2 - A^2$ en $R[x]$.
    b) Sea R un anillo cualquiera y sean f, g, $h \in R[x]$ tales que $f = gh$. ¿Puede asegurar que $f(r) = g(r)h(r)$, para todo $r \in R$?

18. Estudiar el criterio de Eisenstein [Hungerford, Chap III, Th. 6.15].

19. Sea D un dominio entero y $c \in D$. Sea $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in D[x]$ y $g(x) = f(x-c)$. Entonces f(x) es irreducible en $D[x]$ si y solo si $g(x)$ es irreducible.

20. Sea p un número primo y sea $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$. Probar que $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$. ¿Es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$? ¿en $\mathbb{R}[x]$?

21. Sea $f(x,y) = xy^2 - x^4$, polinomio en $\mathbb{Z}[x,y]$. Factorizar f como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Z}[x,y]$. Hacer lo mismo para el polinomio $f(x) = x^3 + (3m-1)x + (3n+1)$, polinomio en $\mathbb{Q}[x]$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, visto como polinomio de $\mathbb{Z}[x,y,z]$ y visto como polinomio de $\mathbb{C}[x,y,z]$.