Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FAMAF

Estructuras Algebraicas
Examen 18-12-14

I. Parte teórica. De los ejercicios (1,2 y 3) se debe hacer sólo el (a) o (b).

(1a) Enunciar y demostrar el teorema que establece la existencia de la forma normal de Smith de una matriz entera.

(1b) Enunciar y demostrar el Teorema de Cauchy.

(2a) Definir ideal maximal, enunciar el Lemma de Zorn y enunciar y demostrar el resultado que establece que todo ideal está contenido en un ideal maximal.

(2b) Definir dominio euclídeo (DE), dominio de ideales principales (DIP) y demostar DE implica DIP.

(3a) Demostrar que si R es DIP, todo submódulo de un módulo libre finitamente generado es libre. Dar un ejemplo que muestre que el resultado es falso si R no es DIP.

(3b) Definir módulo libre y módulo proyectivo. Demostrar que todo módulo libre es proyectivo.

II. Parte Práctica.

(1) Sea G un grupo finito y H subgrupo de G.

- Sea P un p-subgrupo de Sylow de G y considere la acción natural de H sobre el conjunto X formado por las clases a izquierda de P en G. Muestre que existe una órbita de la acción tal que su tamaño no es divisible por p.
- Muestre que existe un $\widetilde{P}$, p-subgrupo de Sylow de G, tal que $\widetilde{P} \cap H$ es un p-subgrupo de Sylow de H.
- Muestre que la cantidad de p-subgrupos de Sylow de H es menor ó igual a la cantidad de p-subgrupos de Sylow de G.

(2) Realizar sólo el (a) o (b)

(a) Sea R un anillo conmutativo con identidad, $1_R \neq 0$, y con la propiedad que los ideales primos son principales. Pruebe que R debe ser un anillo de ideales principales.

(b) Mueste que el anillo de los enteros Gaussianos $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ es un dominio euclidiano y un número primo de $\mathbb{N}$ es compuesto en $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ si y solo si es una suma de cuadrados.

(3) Sea R un DIP, M un R-módulo unitario y $p \in R$ elemento primo. Sean $pM := \{px \mid x \in M\}$ y $M[p] := \{x \in M \mid px = 0\}$. Probar que:

1) $R/(p)$ es un cuerpo.
2) pM y $M[p]$ son submódulos de M.
3) M/pM es un espacio vectorial sobre $R/(p)$ con $(r + (p)) \cdot (x + pM) = rx + pM$.
4) $M[p]$ es un espacio vectorial sobre $R/(p)$ con $(r + (p)) \cdot x = rx$.

(4) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ como grupos abelianos.
2) Los grupos $\mathbb{S}_5$ y $\mathbb{A}_5$ tienen 6 subgrupos de orden 5.
3) $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \simeq \mathbb{C}$ como anillos.
4) Sea F un cuerpo. Si $f(x) \in F[x]$ no tiene ceros en F, entonces $f(x)$ es irreducible en $F[x]$.