Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF

Álgebra / Álgebra II · 2014-1
Parcial N° 2

Nombre Completo:
Documento:

I. Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_3 - x_4, x_4 + x_3 - x_2, x_1 - x_3 + x_4)$$

a) (15 Ptos.) Dar una base, la dimensión y caracterizar con ecuaciones el núcleo de T, $\mathrm{Nu}(T)$, y la imagen de T, $\mathrm{Im}(T)$. Encontrar todos los $v \in \mathbb{R}^4$ tales que $T(v) = (0,0,1)$.

b) (05 Ptos.) Sea W_1 el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$W_1 := \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a - b = 0\}.$$

Dar una base, la dimensión y caracterizar con ecuaciones el subespacio vectorial $\mathrm{Im}(T) \cap W_1$. Dar un complemento directo para $\mathrm{Im}(T) \cap W_1$.

c) (10 Ptos.) Sea W_2 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1,0,-1,1),(0,1,-1,-1)\}$ y $\widetilde{T}$ la transformación lineal de W_2 en $\mathbb{R}^3$ dada por la restricción de T a W_2. Probar que $\widetilde{T}$ es un isomorfismo entre W_2 e $\mathrm{Im}(T)$. ¿Es W_2 un complemento directo de $\mathrm{Nu}(T)$?.

d) (15 Ptos.) Sean $B_1 = \{(0,1,-1,-1),(1,0,-1,1),(-1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^4$ y $B_2 = \{(1,-1,0),(0,0,1),(1,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$, y denotemos por C_1 y C_2 las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Determinar las matrices $[T]_{C_2}^{C_1}$, $[T]_{C_2}^{B_1}$, $[T]_{B_2}^{C_1}$ y $[T]_{B_2}^{B_1}$.

II. Diga si las siguientes afirmaciones son verdades o falsas. Justifique sus respuestas.

a) (15 Ptos.) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el conjunto

$$\{(0,1,-1,-1),(1,0,-1,1),(-1,1,0,1),(0,2,-2,1)\}.$$

Entonces la dimensión de W es igual a 4.

b) (10 Ptos.) Sea $\{v_1,\dots,v_n\}$ un conjunto de generadores de un espacio vectorial V y sea $\{w_1,\dots w_n\}$ un conjunto de n vectores de un espacio vectorial W. Existe una transformación lineal T tal que $T(v_i) = w_i$ para $i = 1,\dots,n$.

c) (15 Ptos.) Sean $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal y $\widehat{w} \in \mathrm{Im}(T)$ un vector con la propiedad que existe un ÚNICO $\widehat{v} \in V$ tal que $T(\widehat{v}) = \widehat{w}$. Entonces la transformación lineal T es inyectiva.

d) (15 Ptos.) La función bilineal sobre $\mathbb{R}^2$ dada por

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_2$$

es un producto interno.

Ejercicio	I. *a)*	I. *b)*	I. *c)*	I. *d)*	II. *a)*	II. *b)*	II. *c)*	II. *d)*	Total
Puntaje									