Álgebra y Álgebra II [Recursado] Primer Cuatrimestre 2014

PRÁCTICO 1

Cuerpos y números complejos

1. Si $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo y 0 es el elemento neutro de $+$, demostrar que:
   i) $a \cdot 0 = 0$, para todo $a \in K$.
   ii) Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

2. Determinar si los siguientes conjuntos con las operaciones consideradas en cada caso son o no cuerpos.
   i) $\mathbb{Z}_p$ con las operaciones usuales (módulo p) y p un número primo.
   [Hint:] Usar la identidad de Bézout: Sean a y p dos números enteros, y d su máximo común divisor. Entonces existen enteros b y q tales que $d = ab + pq$.
   ii) $\mathbb{R}$ con las operaciones dadas por
   $x \oplus y = x + y - 1, \qquad x \odot y = \frac{(x-1)(y-1)}{2} + 1.$

3. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

   a) $(-2+i)(1+2i)$ c) $(2+3i)i - 5 - 6i$ e) $i^{31} - i^{17} - 1$

   b) $4+i$, $(4+i)^2$, $(4+i)^3$ d) $\dfrac{1+i}{1-i}$ f) $\dfrac{2+3i}{3-2i} + \dfrac{1}{1+i}$

4. Encontrar, en cada caso, todos los números complejos z tales que

   a) $z^2 = i$ b) $z^2 = 1 - i$ c) $(1+i)z^2 + (2-i)z - 5 - 6i = 0$ d) $z^3 = -i + 1$

Ecuaciones Lineales

5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$. Grafique e interprete geométricamente las soluciones.
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases} .$$

6. Resolver los siguientes sistemas lineales en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Grafique e interprete geométricamente las soluciones sobre $\mathbb{R}$.
$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} .$$

7. Dar el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones. Cuando haya más de una solución, parametrizar el conjunto y exhibir algunas soluciones concretas.
$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} (2+i)x + (1+i)y = 0 \\ (3-i)x + 2y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0 \\ 6x + y + 3z = 0 \end{cases} .$$

8. Un negocio tiene una cierta cantidad de empleados de limpieza, vendedores y ejecutivos. En la primera semana, les pagan \$ 1 (un peso) por hora a los empleados de limpieza y vendedores, y \$ 5 la hora a los ejecutivos, con un costo total para la empresa de \$ 13 por hora. Los vendedores protestan, y en la segunda semana se les paga \$ 1 por hora a los empleados de limpieza, \$ 2 por hora a los vendedores y \$ 4 a los ejecutivos, con un costo total para la empresa de \$ 17 por semana. Los empleados de limpieza protestan, la empresa decide pagarles \$ 2, pero entonces los vendedores vuelven a protestar. Al final, en la tercera semana la empresa paga \$ 2 a los empleados de limpieza, 3 a los vendedores y 4 a los ejecutivos, con un costo total de \$ 25 pesos la hora. Calcular cuántos empleados de limpieza, cuántos vendedores y cuántos ejecutivos tiene la empresa.

9. Determinar cuáles de las siguientes matrices están escalón reducidas por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Para cada una de las matrices escalón reducida por filas del ejercicio anterior
    (a) asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema,
    (b) asumir que es la matriz ampliada de un sistema No homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

11. (a) Dar todas las posibles matrices 2×2 escalón reducidas por filas.
    (b) Dar todas las posibles matrices 2×3 escalón reducidas por filas.

12. Probar que si un sistema homogéneo, $Ax = 0$, posee soluciones distinta de la trivial, entonces el sistema $Ax = b$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

Ejercicios adicionales

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
    (a) Si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.
    (b) $K = i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : z = it, t \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones usuales de $\mathbb{C}$, es un cuerpo.
    (c) Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo, 0 el elemento neutro de $+$, e la identidad de K y sea L un subconjunto de K tal que $0, e \in L$. Entonces $(L, +, \cdot)$ también es un cuerpo.
    (d) Si $a \in \mathbb{R}$ entonces el polinomio $x^2 + a^2$ tiene siempre dos raíces complejas distintas.
    (e) $\mathbb{R}^2$ con las operaciones

    $$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$$

    es un cuerpo.

2. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

$$\text{a)}\ \frac{4+2i}{6} - \frac{4+2i}{6i} \qquad\qquad \text{b)}\ \frac{3i}{1-2i} - \frac{1}{1+\frac{1}{i}}$$

3. Calcular las raíces cúbicas de 1 y de -1.

4. Resolver los siguientes sistemas lineales en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.
$$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases} .$$
5. Resolver los siguientes sistemas lineales.
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} 2x - z = 4 \\ x - 2y + 2z = 7 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} .$$
6. ¿Para qué valores de a el siguiente sistema tiene única o infinitas soluciones?
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ ax - y + z = 2 \\ 2x - 2y + (2-a)z = 4a \end{cases}$$
7. En cada caso, caracterizar mediante ecuaciones el conjunto de los (b_1, b_2, b_3) para los cuales el sistema dado tenga solución. En aquellos casos en los que haya al menos un $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$, dar dos de ellos.
$$\begin{cases} 2x - z = b_1 \\ x - 2y + z = b_2 \\ 3x - 2y = b_3 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x + 2y - z = b_1 \\ 2x + y + z = b_2 \\ x - y + 2z = b_3 \end{cases} ;$$
$$\begin{cases} x - y + 3z + 2w = b_1 \\ -x + 2y - z + 2w = b_2 \\ x + 5z + 2w = b_3 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x - y + 3z + 2w = b_1 \\ -x + 2y - z + 2w = b_2 \\ x + 5z + 6w = b_3 \end{cases} .$$
8. Una bruja conoce una receta para una pócima de amor que lleva 1 ojo de murciélago, 2 raíces de mandrágora y 2 gramos de polvo de cuerno de unicornio. También tiene una receta para convertir a gente en sapos, la cual lleva 2 ojos de murciélago, una raíz de mandrágora y 3 gramos de polvo de cuerno de unicornio. Una tercera pócima de juventud lleva 3 ojos de murciélago, 3 raíces de mandrágora y 2 gramos de cuerno de unicornio. La bruja tiene 15 ojos de murciélago, 12 raíces de mandrágora y 21 gramos de cuerno de unicornio. La bruja tiene un pacto demoníaco por el cual cuando se ponga a hacer las pócimas, si usa exactamente esa cantidad de ojos, raíces, y polvo de unicornio, una cantidad igual se le aparecerá. ¿Cuántas pócimas de cada tipo puede hacer usando todo su material?

9. Jaimito colecciona arañas, cucarachas, sapos y serpientes. Tiene un total de 25 animales en su colección, entre los cuales puede contar 118 patas. (Todos los animales tienen la cantidad de patas normales que su especie debe tener).Tiene un total de 17 invertebrados y 10 animales venenosos. ¿Cuántas arañas, cucarachas, sapos y serpientes tiene Jaimito?

   [Notas de biología: las arañas tienen 8 patas, las cucarachas 6, ambas son invertebrados, los sapos tienen 4 patas, las serpientes ninguna, ambos son vertebrados. Las arañas y serpientes son venenosas; las cucarachas y los sapos (al menos los que tiene Jaimito) no son venenosos.]