PRÁCTICO 2

Álgebra de matrices

1. Sean
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Realizar los productos AB, BA, AC, CA, BC, CB, ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA.
   (b) Verificar que, en los productos de 3 matrices, da lo mismo asociar de una u otra forma.

2. Probar que si A y B son matrices $r \times n$ y C es una matriz $n \times q$, entonces $(A + B)C = AC + BC$.

3. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$. Repetir el Ejercicio 1 con aquellos productos que tengan sentido.

4. Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:
   (a) si $m > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no nulas.
   Hint: Piense en el problema $BY = 0$ con $m > n$.
   (b) si $r > n$, entonces existe un b, $r \times 1$, tal que $ABX = b$ no tiene solución.
   Hint: Piense en el problema $AZ = b$ con $r > n$.

5. Hallar tres matrices 2×2 distintas que cumplan la ecuación $X^2 = 0$. Hallar tres matrices 2×2 distintas que cumplan la ecuación $X^2 = I$.

6. Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para determinar si son inversibles y hallar la inversa cuando lo sean.
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

7. Sea A la primera matriz del ejercicio anterior. Hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$.

8. Dada una matriz cuadrada $n \times n$ A, se define la *traza* de A como $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Probar que si A y B son matrices $n \times n$ entonces $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

9. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   (a) Sean A y B matrices cuadradas tales $AB = BA$ pero ninguna es múltiplo de la otra. Entonces A o B es diagonal.
   (b) Si A es una matriz diagonal tal que $\operatorname{tr} A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$.
   (c) Dos matrices 3×3 escalón reducidas por filas que tienen la misma cantidad de unos son iguales.
   (d) Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
   (e) Si A y B son matrices inversibles entonces $(A + B)$ es una matriz inversible.
   (f) Si un sistema de ecuaciones tiene dos soluciones diferentes entonces tiene infinitas soluciones diferentes.

EJERCICIOS ADICIONALES PRÁCTICO 2

Ejercicio 1. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a + b + c + d = k$.

Probar que si $k = 0, 1$ o 2 entonces solo hay dos matrices escalón reducidas por filas con esas condiciones, y que en los otros casos hay una sola.

Ejercicio 2. Sean A y B matrices tales que se puede hacer el producto AB. Probar que si A tiene una fila nula, entonces AB la tiene también. Si B tiene una columna nula, también la tiene AB.

Ejercicio 3. Sea B una matriz 2×2 tal que conmuta con cualquier matriz A de tamaño 2×2. Pruebe que $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ para algún número b.

Ejercicio 4. Considere el conjunto $\mathfrak{C}$ de las matrices 2×2 que tienen la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Pruebe que tal conjunto junto con la suma y producto usual de matrices forman un cuerpo.

(b) Sea A una matriz 2×2 la cual conmuta con todos los miembros del conjunto $\mathfrak{C}$. Pruebe que $A \in \mathfrak{C}$.

Hint: En particular A conmuta con la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5. Si A es $n \times r$ y B es $r \times n$, entonces AB y BA son matrices cuadradas. Probar que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Verificar esto para algunos de los productos hechos antes.

Ejercicio 6. Sean A y B dos matrices de tamaño $n \times m$ y $m \times n$ respectivamente, tales que $AB = I_n$ y $BA = I_m$. Mostrar que $m = n$.

Ejercicio 7. A pesar del ejercicio anterior dar ejemplos de matrices A, B y C tales que $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(BAC)$. (Ayuda: Basta con usar matrices 2×2)

Ejercicio 8. Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:

(a) $\mathrm{Rango}(A) = n$ y $\mathrm{Rango}(B) = m \Longrightarrow \mathrm{Rango}(AB) = m$.

(b) $\mathrm{Rango}(AB) = m \Longrightarrow \mathrm{Rango}(B) = m$.

Ejercicio 9. Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times r$ respectivamente, con $r > n$.

(a) Probar que AB no es invertible.

Hint: Ver Ejercicio 8.

(b) Dar un ejemplo con esas condiciones tal que BA sea invertible.

Ejercicio 10. Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para determinar si son inversibles y hallar la inversa cuando lo sean.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 11. Sea A una de las matrices del ejercicio anterior. Hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$. Hacer esto para cada una de las matrices.

Ejercicio 12. Probar que si e es una operación elemental de fila, y $E = e(I)$, entonces $e(A) = EA$ para toda matriz A.

Ejercicio 13. Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño. Probar que si $A \sim I$ y $B \sim I$, entonces $AB \sim I$.

Ejercicio 14. Sea A una matriz $n \times n$ sobre los reales. Una matriz se dice nilpotente si existe un $m \geq 1$ tal que $A^m = 0$. Probar que si una matriz A es nilpotente, entonces $A - I$ es invertible.

Ejercicio 15. Pruebe que el producto de matrices invertibles es invertible.

Ejercicio 16. Sean A y B matrices invertibles tales que $A + B$ es una matriz invertible. Probar que la matriz $A^{-1} + B^{-1}$ es invertible.
Hint: Considere la inversa de la matriz $C := A(A+B)^{-1}B$.