PRÁCTICO 3

Geometría del Plano y del Espacio

1. En cada uno de los siguientes casos graficar A y determinar $A+B$, $A-B$, $3A$, $-2B$.
   (a) $A=(2,-1)$ y $B=(-1,1)$, (b) $A=(-1,3)$ y $B=(0,4)$,
   (c) $A=(2,1,3)$ y $B=(-1,1,1)$, (d) $A=(15,-2,4)$ y $B=(\pi,3,-1)$.
2. En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{AB}$ son equivalentes y/o paralelos.
   (a) $P=(1,-1)$, $Q=(4,3)$, $A=(-1,5)$, $B=(5,2)$.
   (b) $P=(1,4)$, $Q=(-3,5)$, $A=(5,7)$, $B=(1,8)$.
   (c) $P=(1,4)$, $Q=(-3,5)$, $A=(5,7)$, $B=(-3,9)$.
   (d) $P=(1,-1,5)$, $Q=(-2,3,-4)$, $A=(3,1,1)$, $B=(0,5,10)$.
   (e) $P=(2,3,-4)$, $Q=(-1,3,5)$, $A=(-2,3,-1)$, $B=(-11,3,-28)$.
   (f) $P=(1,-1,5)$, $Q=(-2,3,-4)$, $A=(3,1,1)$, $B=(-3,9,-17)$.
3. Encontrar la longitud de los vectores.
   (a) $(2,3)$, (b) $(2,-1,4)$, (c) $(-7,1,3)$, (d) (t,t^2),
   (e) $(x,2x+3)$, (f) $(\cos\phi, \mathrm{sen}\phi)$, (g) $(r\cos\phi\cos\theta, r\cos\phi\,\mathrm{sen}\theta, r\,\mathrm{sen}\phi)$.
4. Calcular $X.Y$ y el ángulo $\angle X,Y$ para los siguientes vectores.
   (a) $X=(2,2)$, $Y=(1,0)$, (b) $X=(-2,2)$, $Y=(3,-3)$.
   (c) $X=(\cos(\phi),\mathrm{sen}(\phi))$, $Y=(\cos(\phi+\rho),\mathrm{sen}(\phi+\rho))$, (d) $X=(-5,3,1)$, $Y=(2,-4,-7)$.
   (e) $X=(\pi,\frac{2}{\pi},3)$, $Y=(\pi,-\pi,\pi)$.
5. ¿Qué parejas de vectores son perpendiculares entre sí?
   (a) $(1,-1,1)$ y $(2,1,5)$, (b) $(1,-1,1)$ y $(2,3,1)$, (c) $(-5,2,7)$ y $(3,-1,2)$, (d) $(\pi,2,1)$ y $(2,-\pi,0)$.
6. Sea $X_0=(2,-1,1)$.
   (a) Describir paramétricamente el conjunto $V=\{Y\in\mathbb{R}^3 : X_0.Y=0\}$.
   (b) Describir paramétricamente el conjunto $W=\{Y\in\mathbb{R}^3 : X_0.Z=1\}$.
   (c) ¿Qué relación hay entre V y W?
7. Sean $X=(\cos(\theta),\sin(\theta))$ e $Y=(-\sin(\theta),\cos(\theta))$. ¿Son X e Y perpendiculares entre sí? Dado un $Z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$ ¿es posible expresar a Z como una combinación lineal de X e Y?
8. Dados tres vectores no nulos y distintos entre sí X, Y, Z en $\mathbb{R}^2$, probar que al menos dos de estos tienen producto escalar distinto de 0. ¿Puede plantear y probar un resultado similar en $\mathbb{R}^3$?.
9. Sean $A,B\in\mathbb{R}^2$ dos puntos arbitrarios. Determinar todos los $X\in\mathbb{R}^2$ tales $d(X,A)=2d(X,B)$ ¿Qué pasa si se cambia por la condición $d(X,A)=c\cdot d(X,B)$ con $c\in\mathbb{R}$?.
   Hint: Considere la circunferencia con centro en $Z=A+\frac{4}{3}(B-A)$ y radio $r=\frac{2}{3}||B-A||$.
10. Sea $p(t)=(\cos t,\mathrm{sen}t)$ el vector posición de una partícula en el plano en el tiempo t. Mostrar que $p(t)$ y el vector velocidad $v(t)$ son siempre perpendiculares.
11. Describir paramétricamente e implícitamente las siguientes rectas.
    R_1: recta que pasa por $(2,0)$ y es ortogonal a $(1,3)$.
    R_2: recta que pasa por $(1,3)$ y es paralela a la que pasa por $(-1,4)$ y $(3,-2)$.
    R_3: recta que pasa por $(-3,0,2)$ y es paralela al vector $(0,3,-2)$.
    R_4: recta que pasa por los puntos $(-1,5,4)$ y $(0,3,-2)$.
    $R_5=\{(x,y,z) : \frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{1/2}=\frac{z+1}{-3}\}$.

12. Demostrar las siguientes proposiciones.
   (a) Dados X e Y vectores en $\mathbb{R}^3$, se satisface

$$\begin{aligned} |X.Y| &\leq ||X||||Y|| \text{ [Desigualdad de Cauchy-Schwarz]} \\ ||X+Y|| &\leq ||X||+||Y|| \text{ [Desigualdad Triangular o de Minkowski]} \end{aligned}$$

   (b) $X.(Y \times Z) = \det \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.
   (c) $||X \times Y||^2 + (X.Y)^2 = ||X||^2||Y||^2$ [Identidad de Lagrange].
   (d) $||X \times Y|| = ||X||\,||Y||\operatorname{sen}(\theta)$ donde θ es el ángulo entre X e Y.
   (e) Probar la **Ley de Senos** usando la identidad anterior y su relación con el área de un triángulo.
   (f) $X \times Y = 0$ si y sólo si X e Yson paralelos.
   (g) El producto $\times$ satisface la identidad de Jacobi

$$0 = X \times (Y \times Z) + Y \times (Z \times X) + Z \times (X \times Y)$$

13. Calcular.
   (a) El área del triángulo de vértices $(1,2)$, $(-1,2)$, $(2,4)$.
   (b) El área del triángulo de vértices $(-2,1,3)$, $(1,0,3)$, $(5,2,3)$.
   (c) El volumen del paralelepípedo definido por los vectores $(-2,3,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,3)$.
   (d) El volumen del tetraedro de vértices $(-2,3,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,3)$.

14. Describir paramétricamente e implícitamente los siguientes planos. En todos los planos escribir la ecuación general y la ecuación normal.
   π_1: el plano que pasa por $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,-2,0)$.
   π_2: el plano que pasa por $(0,1,6)$, $(1,-1,3)$, $(2,-2,2)$.
   π_3: el plano que pasa por $(3,2,0)$, $(1,1,1)$ y es paralelo a la recta que pasa por $(1,1,-1)$, $(3,-2,2)$.
   π_4: el plano que pasa por $(1,2,-2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2,1,-1)$, $(3,-2,1)$.
   π_5: el plano que pasa por $(1,2,1)$ y contiene a la recta que pasa por $(1,4,-3)$, $(-3,-2,3)$.
   $\pi_6 = \{X : X = s(1,2,0) + t(2,0,1) + (1,0,0);\ s,t \in \mathbb{R}\}$.
   $\pi_7 = \{X : X = (1,-1,1) + t(2,1,0) + s(-1,1,-1);\ s,t \in \mathbb{R}\}$.

15. ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_6? Describir la intersección en cada caso.
   (a) $\{X : X = (3,2,1) + t(1,1,1)\}$, (b) $\{X : X = (1,-1,1) + t(1,2,-1)\}$,
   (c) $\{X : X = (-1,0,-1) + t(1,2,-1)\}$, (d) $\{X : X = (1,-2,1) + t(2,-1,1)\}$.

16. Clasificar los siguientes pares de planos de acuerdo a si son coincidentes, paralelos o transversales. En los pares transversales describir la intersección implícita y paramétricamente.
   (a) El plano π_2 y el plano que pasa por $(-1,4,11)$, $(-4,6,12)$, $(5,-6,-3)$.
   (b) El plano π_2 y el plano que pasa por $(4,-4,1)$ y es paralelo a $(4,-5,-6)$ y $(1,0,1)$.
   (c) El plano π_4 y el plano $\{X : X = (1,1,1) + (1,0,0)t + (0,1,0)s;\ s,t \in \mathbb{R}\}$.
   (d) El plano π_6 y el plano $\{X : X = t(1,2,0) + s(2,0,1) + (3,2,1);\ s,t \in \mathbb{R}\}$.
   (e) El plano π_1 y el plano π_7.

17. Hallar la ecuación general de cada mediatriz del triágulo de vértices $(3,0,1)$, $(2,-1,3)$, $(-3,4,-2)$. Encontrar el punto de intersección de las mediatrices.

18. Sean $A = (3,2,1)$, $B = (-1,2,3)$ y $R = \{(x,y,z) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{5}\}$.
   (a) Determinar el punto P de la recta R tal que el ángulo $\angle ABP$ sea recto.
   (b) Determinar el punto P de la recta R tal que el triángulo $\angle ABP$ tiene mínima área posible.

19. Hallar la distancia y el punto que realiza la distancia.
   (a) entre la recta R_2 y el punto $Q = (5,-6)$.
   (b) entre recta R_4 y el punto $Q = (4,3,2)$.
   (c) entre plano π_3 y el punto $Q = (1,2,3)$.

(d) entre las rectas R_2 y $\{X : X = (1,0) + s(2,-3)\}$.
(e) entre las rectas R_4 y R_5.

20. Sean $R_1 = \{tv_1 + P_1 : t \in \mathbb{R}\}$ y $R_2 = \{tv_2 + P_2 : t \in \mathbb{R}\}$ dos rectas alabeadas de $\mathbf{R}^3$. Encontrar una fórmula general para los puntos $Q_i \in R_i$ que realizan la distancia mínima entre las dos rectas.

21. Determinar en cuáles de los siguientes cuatro puntos determinan un cuadrilátero convexo.
(a) $(1,1,1)$, $(2,3,4)$, $(-1,2,2)$ y $(1,4,5)$,
(b) $(1,1,1)$, $(2,3,4)$, $(-1,2,2)$ y $(0,4,5)$,
(c) $(1,1,1)$, $(2,3,4)$, $(-1,2,2)$ y $(2,-2,-3)$.
Además determinar los pares de vértices opuestos del cuadrilátero obtenido y calcular su área.

22. Calcular el volumen de la pirámide que se obtiene al agregar el punto $(1,1,-6)$ al cuadrilátero del ejercicio anterior.