PRÁCTICO 4

Espacios vectoriales

Ejercicio 1. Sea V un espacio vectorial. Probar que si a es un escalar y v es un vector tales que $a.v = 0$, entonces $a = 0$ ó $v = 0$.

Ejercicio 2. Decidir si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones abajo definidas.

(a) El conjunto de polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que n con las operaciones usuales de polinomios.

(b) $\mathbb{R}^2$ con $(x, y) \oplus (x_1, y_2) = (x + x_1, 0)$, $c \odot (x, y) = (cx, 0)$.

Ejercicio 3. Si $(V, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial y S un conjunto cualquiera, sea

$$V^S = \{f : S \to V\}, \text{ el conjunto de funciones de } S \text{ en } V.$$

Definimos entonces en V^S la suma y el producto por escalares de la siguiente manera. Si $f, g \in V^S$ y $c \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} &f + g : S \to V \text{ tal que } (f + g)(x) = f(x) \oplus g(x) \quad \forall x \in S \\ &c.f : S \to V \text{ tal que } (c.f)(x) = c \odot f(x), \quad \forall x \in V. \end{aligned}$$

Probar que $(V^S, \mathbb{K}, +, .)$ es un espacio vectorial.

Ejercicio 4. Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o bien $W_2 \subseteq W_1$.

Ejercicio 5. Sea $V = C[0, 1]$ el espacio vectorial de las funciones continuas en $[0, 1]$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial.

(a) $C^1[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ es derivable}\}$.

(b) $\{f \in C[0, 1] : f(1) = 1\}$.

(c) $\{f \in C[0, 1] : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$.

Ejercicio 6. Sea $V = \mathbb{R}^n$. Decidir si el conjunto $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_n\}$ es un subespacio vectorial.

Ejercicio 7. Sea $V =$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales. Decidir si el subconjunto de polinomios de grado par, junto con el polinomio nulo, es un subespacio vectorial.

Ejercicio 8. Hallar a, b y c reales tales que $(-1, 2, 1) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(2, 1, -1)$.

Ejercicio 9. En cada caso, determinar si el conjunto indicado es linealmente independiente.

(a) $\{(1, 0, -1); (1, 2, 1); (0, -3, 2)\}$.

(b) $\{(1, a_{1,2}, \dots, a_{1,100}), (0, 1, a_{2,3}, \dots, a_{2,100}), (0, 0, 1, a_{3,4}, \dots, a_{3,100}), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$.

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 10. Dar una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales.

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$.
(b) $W = \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 : w = x + z,\ y = x - z,\ u = 2x - 3z\}$.
(c) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 : a + d = b + c\}$.
(d) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \operatorname{gr} p \leq 3,\ p'(0) = 0\}$.

Ejercicio 11. En cada caso caracterizar con ecuaciones el subespacio vectorial dado por generadores.

(a) $\langle (1, 0, 3), (0, 1, -2) \rangle$.
(b) $\langle (1, 2, 0), (0, -1, 1), (2, 3, -1) \rangle$.
(c) $\langle (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$.
(d) $\langle 1 + x + x^2,\ x - x^2 + x^3,\ 1 - x,\ 1 - x^2,\ x - x^2,\ 1 + x^4 \rangle$.

Ejercicio 12. ¿Cual es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ cuando se lo considera como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?.

Ejercicio 13. ¿Es $\mathbb{R}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$? ¿Cuál es la dimensión?

Ejercicio 14. Calcular la dimensión y exhibir una base de:

(a) $S = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = A^t\}$.
(b) $S = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A = \bar{A}^t\}$ (considerado como $\mathbb{R}$-subespacio de $\mathbb{C}^{n \times n}$).

Ejercicio 15. Sea $S = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = A^t\}$ y $aS = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = -A^t\}$. Probar que $\mathbb{R}^{n \times n} = S + aS$.

Ejercicio 16. Dar 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ que son LD, y tales que dos cualesquiera de ellos son LI.

Ejercicio 17. Determinar si cada uno de los siguientes conjuntos de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son LI.

(a) $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$.
(b) $\{1, \operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$.

Ejercicio 18. Sean $V = \mathbb{R}^6$ y sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de V:

$$W_1 = \{(u, v, w, x, y, z) : u + v + w = 0,\ x + y + z = 0\};$$
$$W_2 = \langle (1, -1, 1, -1, 1, -1), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 0, -1, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 0, 0, 0) \rangle.$$

(a) Determinar $W_1 \cap W_2$ y describirlo por generadores y con ecuaciones.
(b) Determinar $W_1 + W_2$ y describirlo por generadores y con ecuaciones.
(c) ¿Es la suma $W_1 + W_2$ directa?
(d) Dar un complemento de W_1.
(e) Dar un complemento de W_2.
(f) Decir cuáles de los siguientes vectores están en $W_1 \cap W_2$ y cuáles en $W_1 + W_2$:

$$(1, 1, -2, -2, 1, 1);\ (0, 0, 0, 1, 0, -1);\ (1, 1, 1, 0, 0, 0);\ (3, 0, 0, 1, 1, 3);\ (-1, 2, 5, 6, 5, 4).$$

(g) Para los vectores v del punto anterior en $W_1 + W_2$, hallar $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$.

EJERCICIOS ADICIONALES

Ejercicio 1. Sea V un espacio vectorial. Probar que

(a) Para todo $v \in V$, $0.v = 0$.
(b) Probar que el opuesto de v es único, al que llamamos $-v$. Probar que $-v = (-1).v$.

Ejercicio 2. Decidir si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones abajo definidas.

(a) $\mathbb{R}^n$, con $\alpha \oplus \beta = \alpha - \beta$, y el producto por escalares usual.
(b) El conjunto de polinomios, con el producto por escalares (reales) usual, pero con suma $p(x) \oplus q(x) = p'(x) + q'(x)$ (suma de derivadas).
(c) $\mathbb{R}^3$ con:

$$\begin{aligned} &(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y' - 1, z + z'); \\ &c \odot (x, y, z) = (cx, cy + 1 - c, cz). \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Probar que $V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \{-1, 1\}\}$ con las operaciones definidas a continuación es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$.

$$(x_1, x_2 \ldots, x_n) \oplus (y_1, y_2 \ldots, y_n) = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n);$$

$$c \odot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1^c, \ldots, x_n^c).$$

Ejercicio 4. Sea $V = C[0, 1]$ el espacio vectorial de las funciones continuas en $[0, 1]$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial.

(a) $\{f \in C[0, 1] : f(1) = 0\}$.
(b) $\{f \in C[0, 1] : f(1) \geq 0\}$.
(c) $\{f \in C[0, 1] : f(1) = f(0)\}$.
(d) $\{f \in C[0, 1] : \int_0^1 (f(x))^2 dx = 0\}$.

Ejercicio 5. Sea $V = \mathbb{R}^n$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial.

(a) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists\, j > 1 : x_1 = x_j\}$.
(b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1x_n = 0\}$.

Ejercicio 6. Sea $V = M_n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices n x n. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial.

(a) El conjunto de matrices n x n inversibles.
(b) El conjunto de matrices n x n NO inversibles.
(c) El conjunto de matrices n x n A tales que $AB = BA$. (B una matriz n x n fija).

Ejercicio 7.

- Hallar reales a y b tales que $1 + 2i = a(1 + i) + b(1 - i)$.
- Hallar complejos w y z tales que $1 + 2i = z(1 + i) + w(1 - i)$.

Ejercicio 8. Sea $\{f_1, ..., f_n\}$ un conjunto LI de funciones *pares* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (i.e., $f(x) = f(-x)$ para todo x) y sea $\{g_1, ..., g_m\}$ un conjunto LI de funciones *impares* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (i.e., $f(-x) = -f(x)$ para todo x). Probar que $\{f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m\}$ es LI.

Ejercicio 9. En cada caso extender los conjuntos dados (LI) a una base de dos maneras distintas.

(a) $\{(1,2,0,0),(1,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M^{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $\{x-2x^2, 1-x+x^2, x\} \subseteq \{$polinomios de grado menor o igual que $3\}$.

Ejercicio 10. Sean $p_i(x), i = 1, \ldots, n$ polinomios en $\mathbb{K}[x]$ tales que sus grados son todos distintos.

(a) Probar que $\{p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$ es LI en $\mathbb{K}[x]$.

(b) Probar que $\{1, 1+x, (1+x)^2\}$ es una base del conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2.

(c) Probar que el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2 es generado por $\{1, 2+2x, 1-x+x^2, 2-x^2\}$ ¿Es ese conjunto una base?

Ejercicio 11. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y α, β y γ vectores LI en V.

(a) Probar que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces los vectores $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ y $\beta+\gamma$ son LI.

(b) Mostrar que si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, los vectores $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ y $\beta+\gamma$ no son LI.

Ejercicio 12. Probar que para todo n, el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}, ..., e^{\lambda_n x}\} \subseteq C(\mathbb{R})$ es linealmente independiente si los λ_i son números reales todos distintos.

(Ayuda: Una primera ayuda es hacer los casos $n = 2$, $n = 3$ primero. En general, plantear la ecuación con la que quieren probar LI, luego derivar esa ecuación y continuar derivando hasta tener n ecuaciones. Evaluarlas en $x = 0$).