PRÁCTICO 5

Coordenadas, bases, sumas e intersecciones de subespacios

Ejercicio 1. Probar que los vectores $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (2, 0, 1)$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y dar las coordenadas de un vector (a, b, c) en esta base.

Ejercicio 2. Probar que los vectores $\alpha_1 = (1, 0, -i)$, $\alpha_2 = (1 + i, 1 - i, 1)$, $\alpha_3 = (i, i, i)$ forman una base de $\mathbb{C}^3$ y dar las coordenadas de un vector (a, b, c) en esta base.

Ejercicio 3. Para cuáles $t \in \mathbb{R}$ los vectores $\{(t, 1, 1, 1), (1, t, 1, 1), (1, 1, t, 1), (1, 1, 1, t)\}$ NO forman una base de $\mathbb{R}^4$. Para tales t's, dar la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ que los correspondientes vectores generan.

Ejercicio 4. Sea $W =< S >$ donde $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \subset \mathbb{R}^4$ con

$$\alpha_1 = (-1, 0, 1, 2) \quad \alpha_2 = (3, 4, -2, 5) \quad \alpha_3 = (0, 4, 1, 11) \quad \alpha_4 = (1, 4, 0, 9).$$

Hallar una base de W y describirlo implícitamente, es decir hallar un sistema de ecuaciones lineales homogéneas para las cuáles el espacio de soluciones sea exactamente W.

Ejercicio 5. Sea $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} \subset \mathbb{R}^4$, donde

$$\beta_1 = (1, 1, 1, -2) \quad \beta_2 = (3, 0, -2, 1) \quad \beta_3 = (1, -2, -4, 5) \quad \beta_4 = (-2, 3, -4, 0)$$

y sea $W_2 =< S_2 >$

(a) Hallar una base de W_2.

(b) Hallar un sistema de ecuaciones lineales homogéneas para las cuál es el espacio de soluciones sea exactamente W_2.

(c) Encontrar una base de $W_1 \cap W_2$ y describir $W_1 \cap W_2$ implícitamente. (W_1 es el del ejercicio anterior).

Ejercicio 6. Sea $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ un vector de $\mathbb{R}^3$ y denotemos por $M(3, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices reales de tamaño 3×3. Probar que el subcojunto de $M(3, \mathbb{R})$ formado por aquellas matrices A tales que $Av = 0$ forma un subespacio vectorial. Dar una base para tal subespacio.

Ejercicio 7. Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0) \quad \alpha_2 = (0, 0, 1, 1) \quad \alpha_3 = (1, 0, 0, 4) \quad \alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$$

(a) Demostrar que $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Hallar las coordenadas de cada uno de los vectores de la base canónica respecto de la base ordenada $\mathcal{B}$.

(c) Hallar las matrices de cambio de base de la base canónica a $\mathcal{B}$ y viceversa.

Ejercicio 8. Sea $W =< \alpha_1, \alpha_2 >$ el subespacio de $\mathbb{C}^3$ generado por $\alpha_1 = (1, 0, i)$ y $\alpha_2 = (1 + i, 1, -1)$.

(a) Demostrar que $\mathcal{B}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ es una base de W.

(b) Describir W implícitamente.

(c) Demostrar que los vectores $\beta_1 = (1, 1, 0)$ y $\beta_2 = (1, i, 1 + i)$ pertenecen a W y que $\mathcal{B}_2 = \{\beta_1, \beta_2\}$ es otra base de W.

(d) ¿Cuáles son las coordenadas de α_1 y α_2 en la base ordenada $\mathcal{B}_2$?

(e) Hallar las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ y $P_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$.

Ejercicio 9. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de un espacio vectorial V. Muestre que $\{t_1 v_1, \ldots, t_n v_n\}$ con los t_i's escalares no nulos también forma una base de V. Si un vector $u \in V$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ con respecto a la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ¿Cuáles son las coordenadas de u con respecto a la base $\{t_1 v_1, \ldots, t_n v_n\}$? ¿Cuáles son las coordenadas de $w = v_1 + \ldots + v_n$ en cada base?

Ejercicio 10. Sea $\mathbb{P}_n[x]$ el conjunto de los polinomios reales en la variable x de grado menor ó igual a n. Muestre que $\mathcal{B}_1 := \{1, x, \ldots, x^n\}$ es una base de $\mathbb{P}_n[x]$ como también el conjunto $B_2 := \{1, (x - a), \ldots, (x - a)^n\}$ (para cualquier $a \in \mathbb{R}$). ¿Cuáles son las coordenadas de un polinomio $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ con respecto a la base $\mathcal{B}_2$?.

Ejercicio 11. Siguiendo la notación del Ejercicio 10. Sean $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ números reales distintos. Para i desde 0 hasta n defina el polinomio $p_i(x)$ como:

$$p_i(x) = \frac{1}{(x - a_i)} \prod_{k=0}^{n} (x - a_k).$$

Pruebe que $\{p_0(x), \ldots, p_n(x)\}$ es una base de $\mathbb{P}_n[x]$.

Ejercicio 12. Siguiendo la notación del Ejercicio 10. Sea W el subconjunto de $\mathbb{P}_n[x]$ formado por los polinomios que se anulan en $x = 1$. Muestre que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_n[x]$ y encuentre una base para W .
[**Hint:** Usar Ejercicio 11]

Ejercicio 13. Sean α, β, γ constantes en $\mathbb{R}$. Probar que el conjunto $S := \{\sin(x+\alpha), \sin(x+\beta), \sin(x+\gamma)\}$ es linealmente dependiente sobre $\mathbb{R}$. Si $\beta-\alpha$ no es un múltiplo entero de π ¿Cuál es la dimensión del espacio generado por S? ¿Es posible expresar $\sin(x + \gamma)$ como una combinación lineal del resto de los vectores?

Ejercicio 14. Sean

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

y sean W_1 y W_2 los espacios solución de los sistemas homogéneos asociados a A_1 y A_2 respectivamente.

(a) Hallar una base de W_1 y W_2.

(b) Encontrar una base de $W_1 \cap W_2$ y una base de $W_1 + W_2$.

(c) Describir implícitamente $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

(d) Encontrar un subespacio $W_3 \subset \mathbb{R}^5$ tal que $W_1 \oplus W_3 = W_1 + W_2$.

Ejercicio 15. Sea W_1 y W_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. La suma $W_1 + W_2$ es llamada una *suma directa*, denotada por $W_1 \oplus W_2$ si todo elemento $w \in W_1 + W_2$ puede ser escrito en una única forma como $w = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$. Mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $W_1 \oplus W_2$.
- Si $0 = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$, entonces $w_1 = w_2 = 0$.
- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
- $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$

Ejercicio 16. Sea V un espacio vectorial y W_1 un subespacio vectorial talque existe un único subespacio W_2 tal que $V = W_1 \oplus W_2$ (suma directa). Muestre que $W_1 = V$.

Ejercicio 17.
(a) Expresar $\mathbb{R}^3$ como suma directa de dos subespacios.
(b) Sean $W_1 =< (1,1,1);(1,1,0) >$ y $W_2 =< (1,-1,0) >$. ¿Son ellos complementarios en $\mathbb{R}^3$?
(c) Sean $W_1 =< (1,1,1);(1,1,0) >$ y $W_2 =< (0,0,1) >$. ¿Son ellos complementarios en $\mathbb{R}^3$?

Ejercicio 18. Sea V un espacio vectorial y sea W_1 un subespacio de V. Demostrar que existe un subespacio W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

Ejercicio 19. Sea A una matriz de tamaño $n \times m$ tal que la suma de las entradas de cada fila es cero. Probar que los vectores formados con las columnas de A son linealmente independientes.

Ejercicio 20. Sea V el espacio vectorial real generado por las filas de la matriz (espacio fila)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 42 & -1 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Encontrar una base de V.
(b) Describir implícitamente los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ que están en V.
(c) Si $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V$, dar las coordenadas de u en la base dada en la parte (a).

Ejercicio 21. Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
(b) Hallar las coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$.
(c) Hallar las matrices de cambio de base de la base canónica a $\mathcal{B}$ y viceversa.

Ejercicios adicionales

1. Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$

$$\alpha_1 = (1,1,0,0) \quad \alpha_2 = (0,0,1,1) \quad \alpha_3 = (1,0,0,4) \quad \alpha_4 = (0,0,0,2)$$

(a) Demostrar que $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Hallar las coordenadas de cada uno de los vectores de la base canónica respecto de la base ordenada $\mathcal{B}$.

(c) Hallar las matrices de cambio de base de la base canónica a $\mathcal{B}$ y viceversa.

2. Sean

$$S_1 = \{(1,0,1,2), (-1,2,3,8), (-1,1,1,3), (0,1,2,5)\},$$
$$S_2 = \{(1,1,0,1), (1,-1,0,3), (3,1,2,4), (1,1,2,0)\}$$

y sean $W_1 = < S_1 >$ y $W_2 = < S_2 >$ los correspondientes subespacios generados en $\mathbb{R}^4$.

(a) Dar una base B_i de W_i que esté contenida en S_i, $i = 1, 2$.

(b) Describir W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ en forma implícita.

(c) Dar una base de $W_1 \cap W_2$ y de $W_1 + W_2$.

3. Sea V el espacio vectorial real generado por las filas de la matriz (espacio fila)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 42 & -1 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Encontrar una base de V.

(b) Describir implícitamente los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ que están en V.

(c) Si $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V$, dar las coordenadas de u en la base dada en la parte (a).

4. Sea V el espacio vectorial real de todas las funciones polinomiales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a 2. Sean
$$g_1 = 1 - x, \quad g_2 = x + x^2, \quad g_3 = (x+1)^2.$$

(a) Demostrar que $\mathcal{B} = \{g_1, g_2, g_3\}$ es una base de V.

(b) Hallar las matrices de cambio de base con respecto a $\mathcal{B}$ y a la base canónica $\{1, x, x^2\}$.

5. Sean $\alpha = (x_1, x_2)$ y $\beta = (y_1, y_2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$ tales que

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \qquad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

Demostrar que $\{\alpha, \beta\}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$. Hallar las coordenadas del vector (a, b) en la base ordenada $\{\alpha, \beta\}$.

6. Sea V el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$. Sean W_{par} el subespacio de las funciones pares (i.e. $f(x) = f(-x)$) y W_{impar} el subespacio de las funciones impares (i.e. $f(x) = -f(-x)$). Probar que $V = W_{par} \oplus W_{impar}$