

PRÁCTICO 6

TRANSFORMACIONES LINEALES

- ¿Cuáles de las siguientes funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m son transformaciones lineales?
 - $T(x, y) = (1 + x, y)$
 - $T(x, y) = (y, x, x - 2y)$
 - $T(x, y) = xy$
 - $T(x, y) = (\cos x, y)$
 - $T(x, y, z) = 3x - 2y + 7z$
 - $T(x, y, z) = (z - y, 0)$
- Calcular el núcleo, la imagen y sus respectivas dimensiones para la transformación nula y la identidad para un espacio vectorial V .
- Para cada una de las siguientes transformaciones lineales
 - Dar una descripción paramétrica del $\text{Nu}(T)$, dar su dimensión y una base.
 - Dar una descripción implícita del $\text{Im}(T)$, dar su dimensión y una base.
$$T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T_1(x, y, z) = (z - y, 3x + y + 2z, 2x + y + z).$$

$$T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T_2(x, y, z) = (2x + y + z, y + x, x + z).$$

$$T_3 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad T_3(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + z_2, 2z_1 - 3z_2 + 2z_3, z_1 + z_2).$$

$$T_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad T_4(x) = (x, -x, 2x, -4x).$$

$$T_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad T_5(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_2, 2x_1 + 4x_2, -x_1 - 2x_2).$$

$$T_6 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T_6(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4, -2x_2 + x_3 - x_4, 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 2x_4).$$

$$T_7 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_7(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4.$$

$$T_8 : P^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T_8(p) = (p(1), p(2)).$$

$$T_9 : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad T_9(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -2x_1 - x_2 & x_1 - 2x_3 \\ -x_1 & x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$
- Sea V el espacio vectorial formado por todos los números complejos. Entonces V es tanto un \mathbb{R} -espacio vectorial como un \mathbb{C} -espacio vectorial. Encontrar una transformación T de V en V que sea \mathbb{R} -lineal pero no \mathbb{C} -lineal.
- Sea V y W espacios vectoriales sobre \mathbb{R} y $\varphi : V \rightarrow W$ una función que tan solo cumple que $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ para todo $v, w \in V$ ¿Es φ una transformación lineal de V en W ? Si vemos a V y W como espacios vectoriales sobre \mathbb{Q} ¿Es φ una transformación lineal de (V, \mathbb{Q}) en (W, \mathbb{Q}) ?
- Encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 1) = (1, 0)$, $T(1, 1, 1) = (0, 1)$.
- Determinar si es verdadero o falso:
 - Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces $\mathbb{R}^3 = \text{Nu}(T) \oplus \text{Im}(T)$ (suma directa de subespacios).
 - Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que tal que $T(\alpha_i) = \beta_i$, con

$\alpha_1 = (1, -1)$	$\alpha_2 = (2, -1)$	$\alpha_3 = (-3, 2)$
$\beta_1 = (1, 0)$	$\beta_2 = (0, 1)$	$\beta_3 = (1, 1)$
 - Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo K de dimensión n y m respectivamente. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal y $n > m$, entonces T no es inyectiva.
 - Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo K de dimensión n y m respectivamente. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal y $n < m$, entonces T no es suryectiva.
- Sea V el espacio vectorial de todas las matrices $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{R} y sea A una matriz fija. Sean T_A y S_A las aplicaciones de V en V definidas por $T_A(X) = AX$ y $S_A(X) = AX - XA$.
 - Demostrar que T_A y S_A son transformaciones lineales.

(b) Sea $n = 2$ y sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular $\text{Nu}(T_A)$ e $\text{Im}(T_A)$ y $\text{Nu}(S_A)$ e $\text{Im}(S_A)$.

9. Dar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que su imagen sea el subespacio generado por $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 2)$.

10. Sea P_n el espacio de todas las funciones polinomiales de grado menor o igual a n sobre \mathbb{R} . ¿Cuáles de las siguientes transformaciones lineales son isomorfismos?

(a) $T(p(x)) = p'(x)$ (b) $T(p(x)) = xp'(x)$ (c) $T(p(x)) = p(x - 1)$ (d) $T(p(x)) = p(x) + p'(x)$

11. Sean T y U operadores lineales en \mathbb{R}^2 definidos por

$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1), \quad U(x_1, x_2) = (x_1, 0).$$

Calcular $2T + 3U$, $U + T$, UT , TU , T^2 y U^2 .

12. Dar una fórmula para la composiciones $T_1 \circ T_6$ y $T_9 \circ T_2$ del ejercicio (5).

13. Determinar si las siguientes transformaciones son inversibles y en caso de serlo averiguar la inversa.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x_1, x_2) = (3x_1, x_1 - x_2)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$.

14. Sea $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ la única transformación lineal definida por

$$T(e_1) = (1, 0, i), \quad T(e_2) = (0, 1, 1), \quad T(e_3) = (i, 1, 0).$$

Encontrar una expresión de T de la forma $T(z_1, z_2, z_3)$. Determinar si T es inversible.

15. Encontrar un isomorfismo entre

(a) \mathbb{R}^{mn} y $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

(b) \mathbb{R}^{2n} y \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacios vectoriales.

(c) \mathbb{R}^3 y $\{A \in M_{2 \times 2} : \text{tr}(A) = 0\}$.

16. Para las siguientes transformaciones lineales hallar su matriz respecto de las bases canónicas de los \mathbb{R}^n que correspondan.

(a) $T_1(x, y, z) = (3x - 2y, 2x + 2y, y - z)$.

(b) $T_2(x, y, z) = (y, x - 3z)$.

(c) $T_3(x, y, z) = (x, x, x, x, x)$.

(d) $T_4(x, y, z, w, u, v) = (x, 3y - u + 2z - 4v, x, z, w, u)$.

17. Usando las definiciones del ejercicio anterior, hallar la composición T_2T_1 . Verificar que la matriz T_2T_1 respecto a las bases canónicas es el producto de la matrices de T_2 y T_1 . Repetir para T_4T_3 y T_3T_4 .

18. Sea \mathcal{B} la base canónica de \mathbb{R}^2

(a) Calcular la matriz de la rotación de 30° en sentido horario.

(b) Calcular la matriz de la reflexión con respecto al eje $y = -2x$.

19. Sea T la transformación lineal de \mathbb{R}^2 definida como $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$.

(a) ¿Cuál es la matriz de T en la base canónica?

(b) ¿Cuál es la matriz de T en la base $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, -1)\}$?

(c) ¿Qué representa T geoméricamente?

20. Calcular la matriz de T_1 del ejercicio (17) con respecto a la base $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (2, 1, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 . Calcular la matriz de T_2 del ejercicio (17) con respecto a las bases \mathcal{B}_1 y $\mathcal{B}_2 = \{(2, 1), (-1, 2)\}$ de \mathbb{R}^2 .

21. Sea $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (-1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$ y sea T una transformación lineal en \mathbb{R}^3 definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3).$$

- (a) Determinar las matrices de $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ y $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$?
 (b) Probar que T es invertible y calcular T^{-1} .

22. Calcular la matriz de T_A y S_A del ejercicio (8b) con respecto a la base canónica de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

23. Sea P_n el espacio de polinomios de grado menor o igual a n , y sea T la transformación lineal de P_2 en P_1 definida por

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + b)x + 2c - a.$$

- (a) Si $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$ y $\mathcal{B}' = \{x, 1\}$ ¿Cuál es la matriz de T respecto a \mathcal{B} , \mathcal{B}' ?
 (b) Si $\mathcal{B} = \{x^2 + 1, x^2 + x + 1, x^2\}$ y $\mathcal{B}' = \{1, x\}$ ¿Cuál es la matriz de T respecto a \mathcal{B} , \mathcal{B}' ?

24. Sean en \mathbb{R}^3 los vectores $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, -2)$, $\alpha_3 = (-1, -1, 0)$.

- (a) Si f es la funcional lineal sobre \mathbb{R}^3 tal que

$$f(\alpha_1) = 1, \quad f(\alpha_2) = -1, \quad f(\alpha_3) = 3.$$

Sea $\alpha = (a, b, c)$, encontrar $f(\alpha)$.

- (b) Encontrar una funcional lineal tal que $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$, pero $f(\alpha_3) \neq 0$.

25. Sea W el espacio generado por $\mathcal{B} = \{\sin(x), \cos(x)\}$. Para las siguientes transformaciones lineales, encontrar la matriz de la transformación con respecto a la base \mathcal{B} y determinar si la transformación es un isomorfismo.

- $T(f(x)) = f''(x) + af'(x) + bf(x)$ con a, b constantes en \mathbb{R} .
- $T(f(x)) = f(x - \theta)$ con θ una constante en \mathbb{R} .

26. Sea W el espacio generado por $\mathcal{B} = \{\cos(t), \sin(t), t \cos(t), t \sin(t)\}$ y considere la transformación lineal de V en V dada por $T(f) = f'' + f$. Encontrar la matriz de la transformación lineal T con respecto a la base \mathcal{B} . Encontrar todas las soluciones $f(t) \in W$ de la ecuación diferencial $f'' + f = \cos(t)$.

EJERCICIOS ADICIONALES

27. Sea $L : V \rightarrow V$ una transformación lineal sobre el espacio vectorial V . Si L es nilpotente ($L^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$), probar que $M := I - L$ es una transformación lineal invertible. Use este ejercicio para encontrar algunas soluciones a la ecuación diferencial $y' - y = 5x^2 - 3$.

[Hint: Sea V el espacio vectorial de los polinomios cuadráticos y $L := \frac{d}{dx}$].
 ¿Puede usar las mismas ideas para encontrar soluciones a $y'' + y = 1 - x^2$?

28. Una transformación lineal $P : V \rightarrow V$ es llamada *proyección* si cumple que $P^2 = P$. Muestre que toda proyección induce una descomposición de V como una suma directa de subespacios vectoriales U y W donde W es el núcleo de P y U es el núcleo de $I - P$. ¿Puede dar la matriz de P con respecto a una base de V formada por una base de W y U ?

29. Sea P una proyección y c una constante distinta de 1 ¿Es invertible la transformación lineal $I - cP$?

30. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea T una transformación lineal tal que $\text{Nu}(T) = \text{Im}(T)$.

- (a) Probar que n es par.
 (b) Dar un ejemplo de esta situación.

31. Sea v un vector en \mathbb{R}^n y sea W el conjunto de las matrices $n \times n$ tales que $Av = 0$ para toda matriz $A \in W$. Pruebe que W es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices de tamaño $n \times n$ ¿Cuál es la dimensión?

32. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea R_a la recta $y = ax$ de pendiente a en \mathbb{R}^2 . Sea $S_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la reflexión con respecto a R_a . Encontrar $S_a(x, y)$.

33. Sea $g \in C^1[0, 1]$ (g es una función con derivada continua en el intervalo $[0, 1]$). Definimos $T : C^1[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$ por $T(f) = (fg)'$.
- Probar que T es lineal.
 - Supongamos que, además, g es una función siempre positiva, es decir $g(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1]$. En ese caso calcular el núcleo de T y dar su dimensión.
34. Encontrar dos transformaciones lineales T y U de un espacio vectorial en si mismo tales que $TU = 0$, pero $UT \neq 0$
35. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Si $T^2 = 0$ ¿qué se puede decir sobre la relación que hay entre $\text{Im}(T)$ y $\text{Nu}(T)$? Dar un ejemplo en que $T \neq 0$ y $T^2 = 0$.
36. Sean V y W espacios vectoriales sobre \mathbb{R} . Sea $T : V \rightarrow W$ una función que cumple $T(x + y) = T(x) + T(y)$, para todo $x, y \in V$, y $T(cx) = cT(x)$, para todo $x \in V$ y $c \geq 0$. Entonces T es lineal.
37. Sea T una transformación lineal en \mathbb{C}^2 definida como $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Sea \mathcal{B} la base canónica de \mathbb{C}^2 y \mathcal{B}' la base ordenada $\{(1, -i), (-i, 2)\}$.
- ¿Cuál es la matriz de T respecto a las bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$?
 - ¿Cuál es la matriz de T respecto a las bases $\mathcal{B}', \mathcal{B}$?
 - ¿Cuál es la matriz de T respecto a la base \mathcal{B} ?
 - ¿Cuál es la matriz de T respecto a la base \mathcal{B}' ?
38. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal y W un subespacio de V . W se llama *subespacio invariante* de T si $T(w) \in W$ para todo $w \in W$. Si T es invertible, pruebe que W también es un subespacio invariante de T^{-1} . Si podemos escribir a V como suma directa de W subespacio invariante de T y W' subespacio vectorial ¿Es necesariamente W' también un subespacio invariante de T ?
39. Sea $A : V \rightarrow V$ una transformación lineal invertible, W un subespacio invariante de A y $B : V \rightarrow V$ una transformación lineal que conmuta con A ¿Es W un subespacio invariante de la transformación lineal B ?
40. Considere las siguiente función sobre $\mathbb{P}_n[x]$
- $$T(p(x)) = xp'(x) - p(x), p(x) \in \mathbb{P}_n[x].$$
- ¿Es T una transformación lineal sobre $\mathbb{P}_n[x]$?
 - ¿Cuál es el Núcleo y la Imagen de T ?
 - ¿Se puede escribir $\mathbb{P}_n[x]$ como suma directa de $\ker(T)$ y $\text{Im}(T)$?
41. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y T cualquier transformación lineal de V en V . Muestre que existe un entero positivo k tal que

$$V = \text{Im}(T^k) \oplus \ker(T^k)?$$