PRÁCTICO 7

PRODUCTO INTERNO Y AUTOVECTORES

Producto interno

Ejercicio 1. Decidir si las siguientes funciones bilineales son productos internos en $\mathbb{R}^2$.

(a) $\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$.

(b) $\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_2$.

Ejercicio 2. Dar un producto interno $(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\big((1, 0), (0, 1)\big) = 2$.

Ejercicio 3. Con el producto interno $(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx$, calcular el ángulo entre $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

Ejercicio 4. Para cada uno de los subespacios W de $\mathbb{R}^3$ encontrar el subespacio ortogonal $W^\perp$ y dar una base del mismo.

(a) $W = \langle(1, 1, 1), (1, -1, 0)\rangle$.

(b) $W = \langle(1, -1, 2)\rangle$.

Ejercicio 5. Ortogonalizar las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$ usando el proceso de Gram-Schmidt. ¿En algún caso se obtiene la base canónica?

- $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$,
- $\{(1, -1, 0), (1, 1, 1), (2, 1, 1)\}$.

Dar las coordenadas del vector $(2, -1, 3)$ respecto de cada una de las bases obtenidas.

Ejercicio 6. Consideremos el espacio P_3 de polinomios de grado menor o igual que tres con el producto interno $(p, q) = \int_0^1 pq$. Hallar una base ortonormal de P_3 aplicando Gram-Schmidt a la base canónica de P_3.

Ejercicio 7. Sean W_1 y W_2 dos subespacios de un espacio vectorial con producto interno V. Probar que $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

Ejercicio 8. Consideremos $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto interno $(A, B) = \operatorname{Tr}(AB^t)$. Determinar el espacio ortogonal del subespacio de matrices diagonales.

Ejercicio 9. Sea V un espacio con producto interno sobre $\mathbb{R}$ y sean v_1, v_2, v_3 y v_4 en V cuatro vectores tales que $(v_i, v_j) < 0$ con $i \neq j$. Muestre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto linealmente independiente. ¿Es posible encontrar cuatro vectores en $\mathbb{R}^2$ satisfaciendo la anterior condición? ¿Tres vectores en $\mathbb{R}^2$ cumpliendo tal condición?

Ejercicio 10. Sean A y B dos transformaciones lineales desde un espacio con producto interno $V, (\cdot, \cdot)$ a un espacio con producto interno $W, (\cdot, \cdot)$ tales que:

$$(A(v), w) = (B(v), w), \text{ para todo } v \in V \text{ y } w \in W$$

¿Qué relación hay entre A y B?

Ejercicio 11. Sea A una función sobre un espacio vectorial con producto interno $V, (\cdot, \cdot)$ satisfaciendo

$$(A(v), A(w)) = (v, w), \text{ para todo } v, w \in V.$$

Pruebe que A debe ser una transformación lineal. Una transformación lineal satisfaciendo la anterior condición recibe el nombre de *transformación ortogonal.*

Ejercicio 12. Sean $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ dos subconjuntos de vectores de un espacio vectorial con producto interno $V, (\cdot, \cdot)$ (de dimensión n) ¿Existe una transformación lineal que mande a cada v_i en u_i? Muestre que si

$$(v_i, v_j) = (u_i, u_j), \text{ para todo } i, j$$

entonces existe una transformación ortogonal A tal que

$$A(v_i) = u_i, \text{ para todo } i.$$

Hint: Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base para el espacio generado por $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Pruebe primero que $\{u_1, \ldots, u_m\}$ también es una base para el espacio generado por $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Ejercicio 13. Sean A y B dos transformaciones lineales sobre un espacio con producto interno $V, (\cdot, \cdot)$ tales que

$$(A(v), A(v)) = (B(v), B(v)), \text{ para todo } v \in V.$$

Muestre que existe una transformación ortogonal C tal que

$$A = CB$$

Autovalores y autovectores

Ejercicio 1. Hallar los autovalores, autovectores y autoespacios de la siguientes matrices A y determinar si son semejantes o no a una matriz diagonal D.

Cuando sí lo sean, dar una P tal que $D = P^{-1}AP$. Considerarlas primero como matrices reales y luego como complejas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Sea A una matriz 2×2. Probar que el polinomio característico de A es $x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A)$.

Ejercicio 3. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales T hallar sus autovalores y para cada uno de ellos dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Luego decir si la transformación considerada es o no diagonalizable.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, 0)$.
(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (2x - y, x + 4y, z + 3w, z - w)$.
(c) $T : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, $T(p(x)) = p'(x)$.
(d) $T : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, $T(p(x)) = p(x + 1)$.

Aquí $\mathbb{P}^n$ es el espacio de polinomios de grado $\leq n$.

Ejercicio 4. Probar que hay una única transformación lineal T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1)$ es autovector de autovalor 2 y $(-2, 1)$ es autovector de autovalor 1. Calcular $\det(T)$ y dar la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicios adicionales

Ejercicio 1. Calcular el ángulo entre: $(2,2)$ y $(1,0)$; $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$ y $(\cos(\phi+\rho), \operatorname{sen}(\phi+\rho))$.

Ejercicio 2. Hallar un vector en $\mathbb{R}^3$ ortogonal a $(1,-1,1)$ y a $(0,2,1)$.

Ejercicio 3. Para cada uno de los subespacios W de $\mathbb{R}^4$, encontrar el subespacio ortogonal $W^\perp$ y dar una base del mismo.

(a) $W = \langle (1,0,-2,1), (1,1,3,1), (1,-1,1,1) \rangle$.

(b) $W = \langle (1,1,1,1), (1,2,3,0) \rangle$.

Ejercicio 4. Determinar el espacio ortogonal al subespacio de funciones impares en el espacio de funciones continuas en el $[-1,1]$ con el producto interno dado por la integral.

Ejercicio 5. Sea $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x,y,z,u,v) = (x+z+3u+3v, x+y+3u+2v, y+z+2u+3v, x+y+z+4u+4v).$$

(a) Dar la matriz de T en la base canónica.

(b) Determinar la imagen de T y dar una base y su dimensión.

(c) Determinar el núcleo de T y dar una base y su dimensión.

(d) Determinar el ortogonal a la imagen de T y dar una base y su dimensión.

(e) Determinar el ortogonal al núcleo de T y dar una base y su dimensión.

(f) Decir cuáles de los siguientes vectores están en $\operatorname{Im} T$, $\ker T$, $(\operatorname{Im} T)^\perp$ o $(\ker T)^\perp$:

$$(1,2,3,3), \qquad (1,1,1,-6), \qquad (-3,-2,-3,1,1),$$
$$(1,2,1,5,5), \qquad (1,1,1,4,3).$$

Ejercicio 6. Sean V y W dos espacios vectoriales de igual dimensión (finita) con productos internos $(\,,)$ y $[\,,]$ respectivamente. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal que preserva los productos internos, es decir tal que $[Tx, Ty] = (x,y)$ para todo $x, y \in V$.

(a) Probar que T es un isomorfismo.

(b) Sea $V = C[0,1]$ y sean $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ y $[f,g] = \int_0^1 f(t)g(t)t^2\,dt$. Ya sabemos que $(\,,)$ es un producto interno, mostrar que $[\,,]$ también.

(c) Sea V como en el inciso anterior. Probar que la transformación T definida por $T(f)(t) = tf(t)$ es lineal, y no es un isomorfismo.

(d) Probar que la T del inciso anterior satisface que $(Tf, Tg) = [f,g]$.

(e) ¿Por qué los tres items anteriores no contradicen el primer inciso?

Ejercicio 7. Sea $N = \{v_i, \ldots, v_p\}$ un subconjunto de p vectores de un espacio vectorial con producto interno $V, (\cdots, \cdots)$ de dimensión n. El conjunto N es tal que

$$(v_i, v_i) < 0, \;\; \text{con } i \neq j.$$

Demuestre que $p \leq n+1$. En general ¿es posible que $p = n+1$?.

Ejercicio 8. Sea A una transformación ortogonal sobre un espacio con producto interno $V, (\cdot, \cdot)$. Muestre que V es la suma directa de los subespacios W_1 y W_2 donde

$$W_1 = \{v \in V : A(v) = v\},$$
$$W_2 = \{v - A(v) : v \in V\}.$$

Ejercicio 9. Sean v, u y w tres vectores unitarios en $\mathbb{R}^2$. ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos que puede tomar la expresión $(u, v) + (u, w) + (v, w)$? ¿En qué vectores se obtienen tales valores?

Ejercicio 10. Probar que una matriz A, 2×2 no inversible, tiene autovalores 0 y $\mathrm{Tr}(A)$.

Ejercicio 11. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que el término independiente del polinomio característico de A es $(-1)^n \det(A)$ y que el coeficiente de grado $n - 1$ es $-\mathrm{Tr}(A)$.

Ejercicio 12. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

(a) Probar que 0 es autovalor de AB si y solo si lo es de BA.

(b) Probar que AB y BA tienen los mismos autovalores.

Ejercicio 13. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales T hallar sus autovalores y para cada uno de ellos dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Luego decir si la transformación considerada es o no diagonalizable.

(a) $T : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, $T(p(x)) = xp'(x)$.

(b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, $T(x, y, z, u, v) = (3x + 2y + 4z, 2x + 2z, 4x + 2y + 3z, 3u + v, 2u + 2v)$.

Ejercicio 14. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que si $c_1, \ldots, c_n$ son los autovalores de A (posiblemente repetidos), entonces $\det(A) = c_1 \ldots c_n$ y $\mathrm{Tr}(A) = c_1 + \cdots + c_n$.

Ejercicio 15. Sea T una transformación lineal sobre un espacio vectorial V con productor interno $(\cdot, \cdot)$ tal que $(Tv, w) + (v, Tw) = 0$ para todo $v, w \in V$. Pruebe que, si λ es un autovalor real de T, entonces $\lambda = 0$.