Parcial 1
29 de Septiembre de 2015

1. Sea $\mathbb{S}_n$ el *grupo simétrico de grado* n y $\mathbb{A}_n$ el subgrupo de $\mathbb{S}_n$ formado por todas las permutaciones pares, llamado el *grupo alternante de grado* n.

   (a) Sea $V := \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ subconjunto de $\mathbb{A}_4$. Pruebe que V es un subgrupo normal de $\mathbb{A}_4$ y que $\mathbb{A}_4/V \cong \mathbb{Z}_3$. ¿Cuántos subgrupos normales de 4 elementos tiene $\mathbb{A}_4$?.

   (b) Pruebe que $\mathbb{A}_4$ no tiene subgrupos de índice 2.

   (c) Pruebe que $\mathbb{A}_4$ no tiene subgrupos normales de orden 2 ni de orden 3.

   (d) Dar todos los homomorfismos de grupo de $\mathbb{A}_4$ en $\mathbb{Z}_{12}$.

2. Grupos abelianos finitamente generados.

   (a) Determinar la estructura del grupo abeliano G definido por generadores a, b, c y relaciones $5a - 2b + 3c = 2b + 4c = a + 6b - c = 0$.

   (b) Clasificar todos los grupos abelianos de orden $144 = 12^2$.

3. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas ó falsas. Justificar.

   (a) Si G es un grupo finito y N es un subgrupo normal de G entonces cualquier elemento de G con orden primo relativo a $[G : N]$ debe pertenecer a N.

   (b) Sean G_1 y G_2 grupos. Entonces $S := G_1 \times G_2$ junto con las inclusiones canónicas $\iota_i : G_i \to S$ es un coproducto para $\{G_1, G_2\}$ en la categoría de grupos.

   (c) Sea G un grupo finito y N un subgrupo normal de G. Entonces $G \cong N \times G/N$.