Estructuras Algebraicas
Periodo 2015-II

FAMAF

Parcial 2 - Recuperatorio
19 de Noviembre de 2015

1. Sean G un p-grupo finito y H un subgrupo normal no trivial de G. Probar que la intersección de H con el centro de G es no trivial.

2. En el siguiente ejercicio $\mathbb{Z}[\imath]$ es el anillo de los enteros Gaussianos.

   (a) Pruebe que $\mathbb{Z}[\imath]$ es un dominio de ideales principales.

   (b) Determine todas las unidades de $\mathbb{Z}[\imath]$.

   (c) Sean a y b enteros primos relativos. Muestre que el homomorfismo de anillos $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\imath]/(a+b\imath)$ tal que $1 \mapsto 1$ induce un isomorfismo de anillos entre $\mathbb{Z}[\imath]/(a+b\imath)$ y $\mathbb{Z}_{a^2+b^2}$.

   (d) ¿Es el anillo $\mathbb{Z}[\imath]/(2)$ isomorfo al anillo $\mathbb{Z}_4$? ¿ A que anillo conocido es isomorfo el cociente $(1+\imath)/(2)$?

3. Sea R un anillo con identidad. Probar que todo R-módulo cíclico unitario es isomorfo a un R-módulo de la forma R/J, donde J es un ideal a izquierda de R.

4. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   (a) Todo R-módulo finitamente generado es también finitamente generado visto como grupo abeliano.

   (b) Sea R el producto directo de los anillos R_1 y R_2. Entonces los ideales primos de R son de la forma $P_1 \times P_2$ con P_i ideal primo de R_i.

   (c) Todo polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}[x]$.