Estructuras Algebraicas
Periodo 2015-II

FAMAF

Parcial 2
17 de Noviembre de 2015

1. Sea G un grupo de orden p^n con p un número primo. Probar que para cada k, con $0 \leq k \leq n$, G tiene un subgrupo normal de orden p^k.

2. En el siguiente ejercicio consideramos sobre $\mathbb{Z}_m$ su estructura natural de anillo y sobre el producto $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ la estructura de anillo dada por la suma y la multiplicación componente a componente.
   (a) Pruebe que $\mathbb{Z}_m$ es un anillo de ideales principales.
   (b) Caracterice los ideales primos y maximales de $\mathbb{Z}_m$. Si I es un ideal primo de $\mathbb{Z}_m$, identifique el anillo cociente $\mathbb{Z}_m/I$ con un anillo conocido.
   (c) Dar todos los ideales primos de $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$.
   (d) Dar todos los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ en $\mathbb{Z}_5$.

3. Sea R un DIP, M un R-módulo unitario y $p \in R$ elemento primo. Sean $pM := \{px \mid x \in M\}$ y $M[p] := \{x \in M \mid px = 0\}$. Probar que:
   (a) $R/(p)$ es un cuerpo.
   (b) pM y $M[p]$ son submódulos de M.
   (c) M/pM es un espacio vectorial sobre $R/(p)$ con $(r + (p)) \cdot (x + pM) = rx + pM$.
   (d) $M[p]$ es un espacio vectorial sobre $R/(p)$ con $(r + (p)) \cdot x = rx$.

4. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   (a) En un anillo R finito conmutativo con identidad $1_R \neq 0$, los ideales maximales y los ideales primos coinciden.
   (b) $11 + 7\imath$ y $18 - \imath$ son coprimos en $\mathbb{Z}[\imath]$.
   (c) El anillo cociente $\mathbb{Z}[x]/(X^2 + 3x + 3)$ es isomorfo al cuerpo $\mathbb{Z}_7$.
   (d) Para cada p primo, el polinomio $f = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ es irreducible in $\mathbb{Z}[x]$.