Estructuras Algebraicas
Periodo 2015-II

FAMAF

Práctico 1

1. Decidir en cada caso si $(G,*)$ es un grupo y, en caso afirmativo, si es abeliano o no.

   (a) $G=\mathbb{R}_{>0}$, $a*b=a^b$.

   (b) $G=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $(m,n)*(r,s)=(m+(-1)^n r, n+s)$.

   (c) $G=\{f:X\to X\,:\, f$ es inyectiva $\}$, con X un conjunto no vacío, $f*g=f\circ g$. ¿Si X es finito?

   (d) $G=\{f:X\to X\,:\, f$ es suryectiva $\}$, con X un conjunto no vacío, $f*g=f\circ g$. ¿Si X es finito?

   (e) $G=\mathcal{P}(X)$ (partes de X), con X un conjunto, $A*B=A\cup B$.

   (f) $G=\mathcal{P}(X)$ (partes de X), con X un conjunto, $A*B=A\cap B$.

   (g) $G=\mathcal{P}(X)$ (partes de X), con X un conjunto, $A*B=A\cup B-A\cap B$.

   (h) $G=\mathrm{Aff}(n)=\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\,:\, f(x)=T(x)+\mathbf{v},\text{ donde } T\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\}$, $f*g=f\circ g$.

   (i) G un conjunto con más de un elemento y $a*b=b$ para todo a,b en G.

2. Sea G un semigrupo que tiene una identidad a izquierda e, y cada elemento tiene un inverso a derecha, es decir que para cada elemento x existe un y tal que $xy=e$. Decir si es cierto que G es un grupo.

3. Suponga que la siguiente tabla es la tabla de multiplicar de un grupo. Complete los espacios en blanco.

$*$	e	a	b	c	d
e	e				
a		b			e
b		c	d	e	
c		d		a	b
d					

   Ayuda: Comience probando que e es la identidad del grupo.

4. Probar que todos los grupos de orden ≤ 5 son abelianos. ¿Son todos cíclicos? ¿Cuántos grupos no isomorfos de orden 4 hay?

5. Probar que $\mathbb{Z}_p^\times := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-\{0\},\cdot)$ es grupo $\Leftrightarrow$ p es primo.

6. Sea $\mathbb{D}_4$ el conjunto de las transformaciones rígidas del plano que dejan fijo al cuadrado del plano $\mathbb{R}^2$ centrado en el origen. Dar la tabla de multiplicar de $\mathbb{D}_4$. ¿Es abeliano?

7. Escribir la tabla de multiplicar y dar el orden de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

8. Sea p un número primo. Definimos

$$R_p := \left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\,:\,(b,p)=1\right\},\qquad R^p := \left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\,:\,b=p^i,\ \text{con } i\geq 0\right\}.$$

   Mostrar que R_p y R^p son grupos abelianos con la suma de $\mathbb{Q}$.

9. (a) La relación $a\sim b \Leftrightarrow a-b\in\mathbb{Z}$ es relación de congruencia en $(\mathbb{Q},+)$.

   (b) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es grupo abeliano infinito.

10. Determinar los elementos del subgrupo cíclico de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ generado por $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

11. Sea G un grupo finito de orden par. Mostrar que existe $a\neq e$ tal que $a^2=e$.

12. Sea G un grupo finito abeliano sin elementos x tales que $x^2=e$, salvo $x=e$. Evaluar $a_1*a_2*\ldots*a_n$ donde $a_1,\ldots,a_n$ son todos los distintos elementos de G.

13. Probar la siguiente parte del teorema de Wilson: Si p es un número primo entonces $(p-2)! \equiv 1(\text{mod } p)$.

14. Sea G un grupo con la propiedad que para todo a, b, c en G tales que $ab = ca$ implica $b = c$. Probar que G es abeliano.

15. Sea G un grupo tal que $a^2 = e$, $\forall\, a \in G$. Mostrar que G es abeliano.

16. Sea G un grupo. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

    (i) G es abeliano.
    (ii) $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall\, a, b \in G$.
    (iii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, $\forall\, a, b \in G$.
    (iv) $(ab)^n = a^nb^n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, a, b \in G$.
    (v) $(ab)^n = a^nb^n$, $\forall\, a, b \in G$, para tres enteros consecutivos.

17. Sea G un grupo, $a, b \in G$, $r \in \mathbb{N}$. Si $bab^{-1} = a^r$, entonces $b^jab^{-j} = a^{r^j}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$.

18. (a) Probar que $|\mathbb{S}_n| = n!$.
    (b) Hallar en $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$ elementos a tales que $a = a^{-1}$ y $a^3 = e$.

Ejercicios Adicionales

1. Sea G un semigrupo. Probar que G es grupo si y sólo si las ecuaciones $ya = b$ y $ax = b$ tienen solución en G, para todo a, $b \in G$.

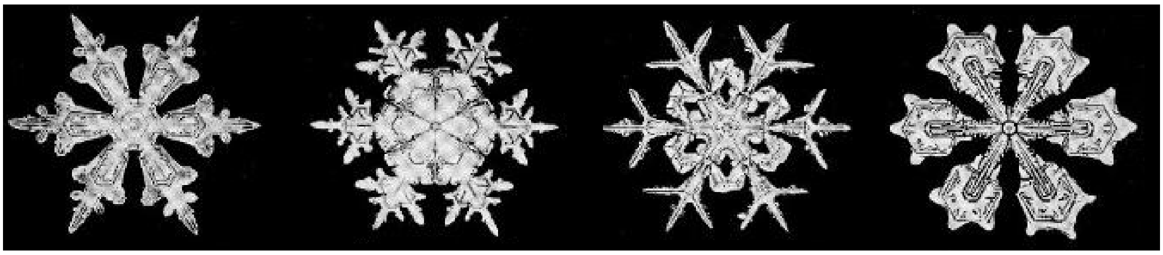
2. Sea G un semigrupo finito. Si vale la ley cancelativa a ambos lados (es decir, $ac = bc \Rightarrow a = b$ y $ca = cb \Rightarrow a = b$), entonces G es un grupo. Mostrar que este resultado es falso si G es infinito.

3. Sea G un grupo finito. Muestre que el número de elementos x de G tales que $x^3 = e$ es impar. Muestre que el número de elementos x de G tales que $x^2 \neq e$ es par. ¿Qué puede decir, en general, sobre la cantidad de elementos x de G, distintos de la identidad, tales que $x^p = e$ donde p es un número primo fijo?

4. Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Sea $F(X, G) = \{f : X \to G \ : f \text{ es función}\}$. Mostrar que $F(X, G)$ es un grupo con la operación $f * g := fg$, donde $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Mostrar que si G es abeliano, entonces $F(X, G)$ también lo es.

5. Sea V_4 el conjunto de las transformaciones rígidas del plano que dejan fijo a un rectángulo no cuadrado del plano $\mathbb{R}^2$ centrado en el origen. Dar la tabla de multiplicar de V_4. ¿Es abeliano?

6. Para cada uno de los siguientes copos de nieve encontrar el grupo de simetrías (descartando las imperfecciones)



7. Para $n > 1$, sea $\mathbb{Z}_n^\times$ el conjunto de todos los enteros positivos menores que n y que son primos relativos a n. Probar que $\mathbb{Z}_n^\times$ es un grupo con la multiplicación módulo n. Dar la tabla de multiplicar de $\mathbb{Z}_{10}^\times$. Encontrar el inverso del 13 en el grupo $\mathbb{Z}_{14}^\times$.

8. Sea G un grupo finito. Pruebe que dado $a \in G$, existe un entero positivo n, dependiendo de a, tal que $a^n = e$. ¿Existe algún n que sirva para todos los elementos del grupo?

9. Si p es primo, mostrar que las únicas soluciones de $x^2 \equiv 1 \bmod p$ are $x \equiv 1 \bmod p$ or $x \equiv -1 \bmod p$.