Práctico 2

1. Sean G, H grupos, y sean $f, g : G \to H$ homomorfismos de grupos. Entonces:
   (i) $f(e_G) = e_H$ y $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.
   (ii) La parte (i) puede ser falsa si G y H son monoides que no son grupos.

2. Determinar si las siguientes asignaciones son homomorfismos, y en tal caso decir si son monomorfismos y/o epimorfismos. (Considerar $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_n$, $n = 6, 5, 12$, con las sumas usuales).
   (i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) := ma$, con $m \in \mathbb{Z}$.
   (ii) $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}$, $f(a) := 2a$.
   (iii) $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}$, $f(a) := 3a$.
   (iv) $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$, $f(a) := 2a$.
   (v) $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f(a) := 3a$.

3. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{Z}_{30}$ tal que $\ker(f) = \{0, 10, 20\}$. Si $f(23) = 9$, determine el conjunto de los a tal que $f(a) = 9$.

4. Sea $f : G \to H$ homomorfismo de grupos. Probar:
   (i) $A < G \Rightarrow f(A) < H$ y $B < H \Rightarrow f^{-1}(B) < G$.
   (ii) $\ker(f) < G$, $\mathrm{Im}(f) < H$. Si G es abeliano, entonces $\mathrm{Im}(f)$ es abeliano.

5. ¿Cuántos epimorfismos hay de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{S}_3$?

6. Dar todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. ¿Es $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ isomorfo a $\mathbb{Z}_4$?

7. Sea $f : G \to H$ homomorfismo de grupos, con f biyectiva. Probar que f^{-1} es un homomorfismo de grupos.

8. Sea G un grupo.
   (i) Sea $f : G \to G$ definida por $f(a) = a^{-1}$. Probar que f es isomorfismo si y sólo si G es abeliano.
   (ii) Sea $f : G \to G$ definida por $f(a) = a^2$. G es abeliano, si y solo si f es endomorfismo.

9. Un subconjunto finito no vacío de un grupo G es un subgrupo si y sólo si es cerrado bajo el producto del grupo G.

10. (i) Sea Q_8 el subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ generado por $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Probar que Q_8 es no abeliano de orden 8.
    (ii) Sea H el subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ generado por $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Probar que H es no abeliano de orden 8, isomorfo a D_4 y no isomorfo a Q_8.

11. Sea G un grupo. Definimos $C(G) := \{a \in G : ab = ba, \forall\, b \in G\}$. Probar que $C(G)$ es un subgrupo abeliano de G (llamado el *centro de* G).

12. Dar todos los a en $\mathbb{Z}_{24}$ tales que $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_{24}$.

13. Sea G un grupo y $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Denotemos por $|a|$ al orden de a en G. Entonces, para todo a y $b \in G$, valen:
    (i) $|a| = |a^{-1}| = |bab^{-1}|$.
    (ii) $|ab| = |ba|$.
    (iii) Si a tiene orden finito n entonces $|a^k| = \frac{n}{\mathrm{mcd}(k,n)}$. En particular, si $k|n$ entonces $|a^k| = \frac{n}{k}$.
    (iv) Si $a \in G$ tiene orden finito, entonces $|f(a)|$ divide a $|a|$.

14. Pruebe que no hay un epimorfismo de $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$.

15. Sea G un grupo.
   (i) Si existen a, $b \in G$ que conmutan y $|a| = m$, $|b| = n$, entonces existe un $c \in G$ tal que $|c| = [m, n]$ (el mínimo común múltiplo de m y n).
   Sugerencia: Piense primero el caso cuando m y n son coprimos. Para el caso general, construya $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ con ordenes $\widehat{n}$ y $\widehat{m}$ respectivamente, tales que $\widehat{n}$ y $\widehat{m}$ son coprimos, y $[m, n] = [\widehat{m}, \widehat{n}]$.
   (ii) Sean p, $q \in \mathbb{N}$, primos distintos. Si $|G| = pq$ y existen a, $b \in G$ con $|a| = p$, $|b| = q$ y que conmutan, entonces G es cíclico.
16. Sea G grupo abeliano finito y defina $\alpha := max\{|g| : g \in G\}$ (el *máximo orden*). Pruebe que para todo $g \in G$, $|g|$ divide a α.
17. Sean G y H grupos, con $G = \langle a \rangle$ cíclico. Mostrar que todo homomorfismo de G en H está determinado por su valor en a.
18. Sea G un grupo cíclico de orden finito. Probar que G tiene a lo más un subgrupo de cada tamaño.
19. Calcular $\mathrm{End}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{End}(\mathbb{Q})$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$.
20. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ y $d = mcd(m, n)$. Pruebe que los homomorfismos de $\mathbb{Z}_m$ en $\mathbb{Z}_n$ son de la forma $[1]_{\mathbb{Z}_m} \mapsto [k\frac{n}{d}]_{\mathbb{Z}_n}$ con $k = 1, \ldots, d$, y en consecuencia, hay $d = mcd(m, n)$ homomorfismos de $\mathbb{Z}_m$ en $\mathbb{Z}_n$.
21. Probar que si G es un grupo cíclico entonces $\mathrm{Aut}(G)$ es abeliano ¿Puede decir algo sobre el recíproco?
22. Probar que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ es isomorfo a $\mathbb{S}_3$.
23. Sea G el producto directo de los dos grupos $\mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Z}_{nq}$ (con $q \geq 1$). Probar que las relaciones $([x]_{\mathbb{Z}_n}, [y]_{\mathbb{Z}_{nq}}) \mapsto ([x+y]_{\mathbb{Z}_n}, [y]_{\mathbb{Z}_{nq}})$ y $([x]_{\mathbb{Z}_n}, [y]_{\mathbb{Z}_{nq}}) \mapsto ([x]_{\mathbb{Z}_n}, [y+qx]_{\mathbb{Z}_{nq}})$ son automorfismos de G ¿Conmutan tales automorfismos?
24. (a) Sea H el subgrupo cíclico de $\mathbb{S}_3$ generado por $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces ninguna coclase a izquierda de H (excepto la misma H) es también una coclase a derecha de H.

   (b) Sea K el subgrupo cíclico de $\mathbb{S}_3$ generado por $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces toda coclase a izquierda de K es también una coclase a derecha de K.
25. Probar el pequeño teorema de Fermat: Si p es primo y $(a, p) = 1$, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
   [Ayuda: pensar en el grupo $(\mathbb{Z}_p - \{0\}, \cdot)$].
26. Probar que existen sólo dos grupos de orden 4 salvo isomorfismos.
27. Sea G un grupo y H, $K < G$. Probar que $HK < G$ si y sólo si $HK = KH$. En particular, si G es abeliano, entonces $HK < G$. (Nota: $HK := \{hk : h \in H, k \in K\}$).
28. Sean k, m, $p \in \mathbb{N}$, con p primo. Sean G un grupo, con $|G| = p^k m$ ($p \nmid m$), H, $K < G$ tales que $|H| = p^k$, $|K| = p^d$, $0 < d \leq k$ y $K \not\subseteq H$. Mostrar que HK no es subgrupo de G.
29. Sean G un grupo y $N < G$. Si $[G : N] = 2$, entonces $N \lhd G$.
30. Sea G un grupo, $\{N_i : i \in I\}$ familia de subgrupos normales de G. Entonces $\cap_{i \in I} N_i \lhd G$.
31. Sean G un grupo, $H < G$ y $a \in G$. Probar que $aHa^{-1} < G$ y $aHa^{-1} \cong H$.
32. Sean G un grupo finito, $H < G$ y $|H| = n$. Si H es el único subgrupo de orden n en G, entonces $H \lhd G$.
33. Sea G un grupo. Probar que $C(G) \lhd G$. Además, si $G/C(G)$ es un grupo cíclico, entonces G es abeliano.
34. Encontrar subgrupos H y K de D_4 tales que $H \lhd K$, $K \lhd D_4$, $H \ntriangleleft D_4$.
35. Sean G_1, G_2 grupos y $N_i \lhd G_i$, $i = 1, 2$. Probar:

   (a) $N_1 \times N_2 \lhd G_1 \times G_2$, (b) $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$.
36. Calcular $6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
37. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Probar las siguientes afirmaciones.
   (i) Si $B \lhd H$, entonces $f^{-1}(B) \lhd G$.
   (ii) Si f es epimorfismo y $A \lhd G$, entonces $f(A) \lhd H$. ¿Vale lo mismo si no pedimos que f sea epimorfismo?

38. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
    (i) Si $|G| = p$, con p primo, entonces G es cíclico.
    (ii) Si $|G| = p^2$, con p primo, entonces G es cíclico.
    (iii) Si $|G| < \infty$ y $a^2 = e$, $\forall\, a \in G$, entonces $|G| = 2^n$.
    (iv) Si $H \lhd G$ y $K \lhd G$, entonces $H \vee K \lhd G$. (Nota: $H \vee K := \langle H \cup K \rangle$).
    (v) Si G es un grupo finito con un epimorfismo en $\mathbb{Z}_{10}$, entonces G tiene subgrupos normales de índice 2 y 5.
    (vi) Cualquier grupo G tal que $|G| = pq$ con p y q números primos es un grupo abeliano ó su centro es $\{e\}$.
    (vii) Sean G_1 y G_2 grupos, y $H_i \lhd G_i$, $i = 1, 2$.
        (i) Si $G_1 \cong G_2$ y $H_1 \cong H_2$, entonces $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$.
        (ii) Si $G_1 \cong G_2$ y $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$, entonces $H_1 \cong H_2$.
        (iii) Si $H_1 \cong H_2$ y $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$, entonces $G_1 \cong G_2$.

Ejercicios Adicionales

1. Sea G el grupo aditivo $\mathbb{Z}[X]$ (todos los polinomios con coeficientes enteros) y sea H el grupo multiplicativo de todos los números racionales positivos. Pruebe que G y H son isomorfos.

2. Sean A y B subgrupos de G. $A \cup B$ es un subgrupo de G si y solo si $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

3. Calcular los subgrupos propios de $(\mathbb{R}, +)$ que son cerrados (topológicamente).
   [Sugerencia: Sea H subgrupo propio cerrado de $(\mathbb{R}, +)$. Considere $h_0 := \inf\{h \in H : h > 0\}$ y pruebe que $h_0 \neq 0$, y posteriormente $H =< h_0 >$.]
   ¿Puede probar un resultado similar para los subgrupos propios cerrados de $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ (los números complejos de norma 1 con el producto usual)?

4. Sean G un grupo finito y $f : G \to G$ un automorfismo sin puntos fijos distintos de la identidad tal que $f^2 = \mathrm{id}$. Entonces G es abeliano.
   [Sugerencia: Muestre que todo elemento g de G puede ser escrito de la forma $x^{-1}f(x)$. Luego, pruebe que f debe ser la función que a todo g lo manda en su inverso.]

5. Sea G un grupo y $\mathrm{Subg}(G) := \{A : A < G\}$. Si $\mathrm{Subg}(G)$ es finito, entonces G es finito.

6. Sea G un grupo abeliano y G_t el conjunto de todos los elementos de G con orden finito. Probar que G_t es un subgrupo de G ¿Que puede decir si G es no abeliano?

7. Sea G un grupo abeliano, p un número primo y $G(p) := \{g \in G : |g| = p^n$ para algún $n \geq 0\}$. Probar que $G(p)$ es un subgrupo de G.

8. Para todo entero positivo n, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_n^\times$.

9. Probar que $\mathbb{Z}_8^\times$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{12}^\times$ y no es isomorfo a $\mathbb{Z}_{10}^\times$.

10. Sea G grupo abeliano finito. Probar que G es cíclico si y solo si G tiene a lo más un subgrupo de cada tamaño. ¿Qué puede decir si sacamos la hipótesis de ser abeliano?

11. Usando que para todo $r \geq 1$ la ecuación $x^r = 1$ tiene a lo más r soluciones en $\mathbb{Z}_p$, pruebe que el grupo $\mathbb{Z}_p^\times := (\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo cíclico.

12. Sea G un grupo sin subgrupos propios. Probar que G es un grupo cíclico de orden p con p primo.

13. Sea G un grupo tal que $\mathrm{Aut}(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

14. Probar que $\mathbb{Z}_{2^n}^\times$, con $n \geq 3$ no es cíclico.

15. Si p es un número primo de la forma $4n + 3$, mostrar que no se puede resolver la ecuación $x^2 \equiv -1 \bmod p$.

16. Cualquier grupo abeliano de orden 35 es cíclico.
    [Sugerencia: Considerar el ejercicio 3 de los adicionales del práctico 1 para conseguir elementos de orden 7 y 5].

17. Probar que un grupo de orden 35 debe ser cíclico.
Sugerencia: Probar que existen dos elementos de orden 5 y 7 respectivamente que conmutan; de no ser así, la cantidad de elementos de orden 5 sera divisible por 4×7 y la cantidad de elementos de orden 7 sera divisible por 6×5.

18. Probar que los racionales $\mathbb{Q}$ con la suma usual, no tiene subgrupos propios de indice finito.

19. Determinar todos los subgrupos de índice 2 en el grupo $\mathbb{R}^{\times} := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con el producto usual de números reales. ¿Qué puede decir de los subgrupos de índice finito de $\mathbb{R}^{\times}$?

20. Suponga que H y K son subgrupos de G y que hay dos elementos a y b de G tales que $aH \subseteq bK$. Probar que $H \subseteq K$.

21. Determinar todos los subgrupos finitos del grupo $\mathbb{C}^{\times} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con el producto de números complejos.

22. Sea G un grupo Abeliano. Determinar todos los homomorfismos de $\mathbb{S}_3$ a G.