Práctico 3

1. Mostrar que:
   (a) $\mathbb{S}_n$ está generado por las $n-1$ transposiciones $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $\ldots$, $(1\ \ n)$.
   [Ayuda: $(i\ j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$]
   (b) $\mathbb{S}_n$ está generado por las $n-1$ transposiciones $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, $\ldots$, $(n-1\ \ n)$.
   [Ayuda: usar que $(1\ j) = (1\ j-1)(j-1\ j)(1\ j-1)$].

2. Si $\sigma = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_r) \in \mathbb{S}_n$ y $\tau \in \mathbb{S}_n$, entonces $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1)\ \tau(i_2)\ \cdots\ \tau(i_r))$.

3. Probar que $\mathbb{A}_n$ es el único subgrupo de $\mathbb{S}_n$ de índice dos.
   [Ayuda: Mostrar que cualquier 3-ciclo debe estar en un subgrupo de índice 2].

4. Mostrar que $N := \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ es un subgrupo normal de $\mathbb{S}_4$ contenido en $\mathbb{A}_4$ tal que $\mathbb{S}_4/N \cong \mathbb{S}_3$ y $\mathbb{A}_4/N \cong \mathbb{Z}_3$.

5. Sea H un subgrupo de $\mathbb{S}_n$. Muestre que todos los miembros de H son permutaciones pares ó exactamente la mitad de los miembros son pares.

6. Sea H un subgrupo de $\mathbb{S}_n$ de orden impar. Muestre que H debe ser un subgrupo de $\mathbb{A}_n$

7. Para $n \geq 5$, el único subgrupo normal propio of $\mathbb{S}_n$ es $\mathbb{A}_n$.

8. Encontrar todos los subgrupos normales de $\mathbb{D}_n$ y dentro de estos decir quien es el centro.

9. Sean G_1 y G_2 dos grupos, mostrar que en general, $G_1 \times G_2$ no es un coproducto en la categoría de grupos. (Recordar que si G_1 y G_2 son abelianos entonces $G_1 \times G_2$ sí es un coproducto en la categoría de grupos abelianos.)

10. Sean $\{G_i : i \in I\}$ una familia de grupos y sea $J \subset I$. Sea $\alpha : \prod_{j \in J} G_i \to \prod_{i \in I} G_i$ la siguiente función
$$\alpha(\{a_i\}) = \{b_i\}, \quad \text{con } b_i = a_i, \text{ si } i \in J \text{ y } b_i = 1, \text{ si } i \notin J.$$
    Demostrar que α es un monomorfismo de grupos.

11. Dar un ejemplo de grupos H_i, K_j tales que $H_1 \times H_2 \cong K_1 \times K_2$ y H_i no es isomorfo a ningún K_j.

12. Sean G un grupo abeliano y $H_j < G$, $j = 1, 2$. Mostrar que $G \cong H_1 \oplus H_2$ si y sólo si existen homomorfismos $\pi_j : G \to H_j$, $\iota : H_j \to G$, $j = 1, 2$, tales que $\pi_j \iota_j = \mathrm{id}_{H_j}$, $\pi_2\iota_1 = \mathbf{0} = \pi_1\iota_2$, y $\iota_1\pi_1(x) + \iota_2\pi_2(x) = x$, para todo $x \in G$. (Aquí $\mathbf{0}$ denota el mapa $\mathbf{0}(x) = 0$, donde 0 es el elemento neutro del grupo abeliano G).

13. Muestre que el grupo libre sobre el conjunto $\{a\}$ es un grupo infinito cíclico, y por lo tanto isomorfo a $\mathbb{Z}$.

14. Sean F un grupo libre y $n \in \mathbb{Z}$. Probar que el subgrupo de F generado por el conjunto $\{w^n : w \in F\}$ es normal en F.

15. Sea X un conjunto y sea F el grupo libre sobre X, con $\iota : X \to F$. Demostrar que ι es inyectiva. Además demostrar que $\iota(X)$ genera el grupo F.

16. Mostrar que el grupo definido por generadores a y b, y relaciones:
    (i) $a^8 = b^2a^4 = ab^{-1}ab = e$, tiene orden ≤ 16.
    (ii) $a^3 = b^9 = a^{-1}bab = e$ es $\mathbb{Z}_3$.
    (iii) $a^2 = b^3 = e$ es infinito y no abeliano.
    (iv) $a^2 = b^2 = e$ es infinito (el grupo Diedral infinito D_∞).
    (v) $a^n = b^2 = abab = e$ es el grupo dihedral D_n.

17. Considerar el conjunto $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ con multiplicación dada por $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$, y las reglas usuales de multiplicación por ± 1. Mostrar que G es un grupo isomorfo al grupo de los cuaterniones Q_8.

18. ¿Es cierto que todo grupo tiene una única presentación por generadores y relaciones?

19. Sea G grupo y $H \lhd G$. Si H y G/H son finitamente generados, entonces G es finitamente generado.

Ejercicios Adicionales

1. Sea H el subgrupo de todas la rotaciones in $\mathbb{D}_n$ y sea f un automorfismo de $\mathbb{D}_n$. Probar que $f(H) = H$.

2. Cualquier grupo finito generado por un par de elementos de orden 2 es un grupo Dihedral, $\mathbb{D}_n$, donde $\mathbb{D}_1 := \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{D}_2 := V_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. ¿Qué se puede decir si sacamos la hipótesis de finitud sobre el grupo?

3. Demostrar que todo elemento distinto de la identidad en un grupo libre tiene orden infinito.

4. Estudiar si las siguientes afirmaciones son verdaderas ó falsas

   (i) Toda permutación par es el cuadrado de una permutación.

   (ii) Todo subgrupo de un grupo libre es un grupo libre.
   [Ayuda: Ver [Theorem 7.10, Knapp][1]].

   (iii) Todo monoide puede ser embedido en un grupo.

   (iv) Un monoide conmutativo puede ser embedido en un grupo si y solo si el monoide tiene la *propiedad cancelativa.*
   [Ayuda: Ver [Pag. 39, Lang][2]].

[1] Anthony W. Knapp, *Basic Algebra; Along with a companion volume Advanced Algebra*, Cornerstones Series, Birkhäuser Basel (2006)

[2] Serge Lang. Álgebra. Graduate Texts in Mathematics, Volume 211 (GTM 211). Tercera Edición revisada, Springer-Verlag, New York (2002). [Originalmente publicado por Addison-Wesley (1965)]