Estructuras Algebraicas
Periodo 2015-II

FAMAF

Práctico 4

1. Sea m un entero. Demostrar que si $\{G_i : i \in I\}$ es una familia de grupos abelianos y $G \simeq \sum G_i$ entonces entonces $mG \simeq \sum mG_i$ y $G/mG \simeq \sum G_i/mG_i$.

2. Un subconjunto X de un grupo abeliano G se dice linealmente independiente (l.i.) si $\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = 0$ implica que $n_i = 0$ para todo i (aquí n_i es entero y $x_1, \ldots, x_n$ son elementos distintos de X).

   (a) Demostrar que X es l.i. si y sólo si todo elemento de $< X >$ puede ser escrito de manera única como suma $\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$ con los n_i enteros y los $x_1, \ldots, x_n$ elementos distintos de X.

   (b) Demostrar que si F es abeliano libre en X entonces X es l.i.

   (c) Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas sobre un grupo abeliano libre F en n generadores:

   - Todo subconjunto generador de n elementos es l.i.
   - Todo subconjunto l.i. de n elementos es una base.
   - Todo subconjunto l.i. de menos de n elementos puede ser extendido a una base de F.
   - Todo conjunto de generadores contiene una base.

3. Sea G el subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$ generado por $a = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y por $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Demostrar que G tiene un subgrupo que no es finitamente generado.
[Sugerencia: Considerar el subgrupo formado por las matrices cuyos elementos de la diagonal son 1s.]

4. Demostrar que si G es un grupo abeliano finitamente generado tal que el único elemento de orden finito en G es el cero, entonces G es abeliano libre. Mostrar que el grupo aditivo de los racionales no es abeliano libre (tampoco finitamente generado) y por lo tanto la conclusión anterior es falsa si no pedimos finitamente generado.

5. En cada uno de los siguientes casos dar una base $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ de A, el natural $k \leq 3$ y los enteros $d_1, \ldots d_k$ tales que $d_1|d_2|\ldots|d_k$ y $\{d_1\alpha_1, \ldots, d_k\alpha_k\}$ es base de B.

   (a) $A = \mathbb{Z}^3$ y B el subgrupo de A generado por los elementos $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

   (b) $A = \mathbb{Z}^3$ y B el subgrupo de A generado por los elementos $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$.

   (c) $A = \mathbb{Z}^3$ y B el subgrupo de A generado por los elementos $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 4)$.

6. Mostrar que un grupo abeliano finito que no es cíclico contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, para algún primo p.

7. Dar los divisores elementales y los factores invariantes de los grupos $G_1 := \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{35}$ y $G_2 := \mathbb{Z}_{26} \oplus \mathbb{Z}_{42} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}_{200} \oplus \mathbb{Z}_{1000}$.

8. Mostrar que los factores invariantes de $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ son (m, n) y $[m, n]$ (el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de m y n) si $(m, n) > 1$, y mn si $(m, n) = 1$.

9. Dar todos los grupos abelianos de orden 67.375, determinando en cada caso sus divisores elementales y sus factores invariantes.

10. Determinar la estructura del grupo abeliano G definido por generadores $\{a, b\}$ y relaciones $2a + 4b = 0$ y $3b = 0$. Hacer lo mismo para el grupo con generadores $\{a, b, c, d\}$ y relaciones $2a + 3b = 4a = 5c + 11d = 0$ y para el grupo con generadores $\{a, b, c, d, e\}$ y relaciones $\{a - 7b + 14d - 21c = 0; 5a - 7b - 2c + 10d - 15e = 0; 3a - 3b - 2c + 6d - 9e = 0; a - b + 2d - 3e = 0\}$.

11. Sean G grupo y $A \lhd G$, con A abeliano. Mostrar que G/A opera sobre A por conjugación y obtener un homomorfismo $f : G/A \to \mathrm{Aut}(A)$

12. Sean N y H dos grupos y sea $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un homomorfismo de grupos. Sea G el conjunto $N \times H$ y definimos en este conjunto el producto

$$(n_1, h_1).(n_2, h_2) = (n_1\phi(h_1)(n_2), h_1h_2).$$

Demostrar que G es un grupo. El grupo G se llama producto semidirecto de H y N a través de ϕ y se denota $N \rtimes_\phi H$.

13. Sean $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ y $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Determinar qué grupo conocido es $\mathbb{Z}_3 \rtimes_\phi \mathbb{Z}_2$ con $\phi(a)(x) = ax$, $a \in \mathbb{Z}_2$ y $x \in \mathbb{Z}_3$.

14. Sean G grupo y $K < G$. Mostrar que
 (i) $K \lhd N_G(K)$. (ii) $K \lhd G$ si y sólo si $N_G(K) = G$. (iii) $C_G(K) \lhd N_G(K)$.

15. Sea G grupo. Supongamos que un elemento a de G tiene exactamente dos conjugados. Probar que G contiene un subgrupo normal propio.

16. Si H es un subgrupo de un grupo G, entonces $N_G(H)/C_G(H)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(H)$.

17. Sea G grupo. Se dice que $f : G \to G$ es un automorfismo *interior* o *interno* si existe $g \in G$ tal que $f(x) = gxg^{-1}$, para todo $x \in G$. Se denota $\mathrm{Int}(G) := \{f : G \to G \, : \, f \text{ es interior}\}$.
 Probar que
 (i) $\mathrm{Int}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$ (ii) $G/C(G) \cong \mathrm{Int}(G)$.

18. Sea G grupo.
   (i) Si $|G| = m$ y p es el menor primo que divide a m, entonces todo subgrupo de índice p es normal.
   (ii) Supongamos que $|G| = pn$, con p primo y $p > n$. Si $H < G$, con $|H| = p$, entonces $H \lhd G$.

19. Sean G un grupo finito de orden $|G| = n.m$, $\pi : G \to \mathbb{A}(G)$ la representación *traslación a izquierda* de G, y sea x un elemento de G de orden n. Entonces la permutación $\pi(x)$ es un producto de m n-ciclos. Además, $\pi(x)$ es una permutación impar si y solo si $|x|$ es par y $[G :< x >]$ es impar.

20. Sean G y π como en el ejercicio anterior. Pruebe que si $\pi(G)$ contiene una permutación impar, entonces G tiene un subgrupo de indice 2.
 [Sugerencia: Considerar uno de los ejercicios del práctico 3.]

21. Si $N \lhd G$, y N y G/N son p-grupos, entonces G es un p-grupo.

22. ¿Es cierto que si G es un p-grupo entonces $|G| < \infty$?

23. Sean G un p-grupo finito y H un subgrupo normal no trivial de G. Probar que $H \cap C(G) \neq \{e\}$ y en particular, si $|H| = p$, entonces $H \subseteq C(G)$.

24. Sea G un grupo de orden p^n, con p primo. Probar que para cada k, con $0 \leq k \leq n$, G tiene un subgrupo normal de orden p^k.

25. Sea G un p-grupo infinito. Demostrar que vale alguna de las siguientes
   (a) G tiene un subgrupo de orden p^n, para cada $n \in \mathbb{N}$, ó
   (b) existe $m \in \mathbb{N}$ tal que cada subgrupo finito tiene orden $\leq p^m$.

26. Sean P un p-subgrupo de Sylow normal de un grupo finito G y $f \in \mathrm{End}(G)$. Probar que $f(P) < P$.

27. Sean G un grupo finito y $H \lhd G$, con $|H| = p^k$. Probar que H está contenido en cada p-subgrupo de Sylow de G.

28. Sea G un grupo finito. Si cada p-subgrupo de Sylow de G es normal para cada primo p, entonces G es el producto de sus subgrupos de Sylow.

29. Probar que si $|G| = 2k$ donde k es impar, entonces G tiene un subgrupo de índice 2.
 [Sugerencia: Sea $x \in G$ tal que $|x| = 2$. Considerar los Ejercicios 19 y 20.]

30. Si $|G| = p^nq$, con $p > q$ primos, entonces G contiene un único subgrupo normal de índice q.

31. Cada grupo de orden 12, 28, 56 y 200 debe contener un subgrupo de Sylow normal, y, por lo tanto, no es simple.

32. ¿Cuántos elementos de orden 7 existen en un grupo simple de orden 168?

33. Todo grupo de orden p^2, con p primo es abeliano
[Sugerencia: Notar que el centro de un tal G no es trivial.]

Ejercicios Adicionales

1. ¿Cuáles son los subgrupos de índice 2 de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$? ¿Qué puede decir, en general, sobre cualquier índice?

2. ¿Podemos contar el número de órbitas? (Lema de Frobenius)
Sea G un grupo finito y X un conjunto finito donde G está actuando. Entonces el número de órbitas es el promedio de los *puntos fijos* de los elementos del grupo, es decir

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\operatorname{Fix}(g)|$$

donde $\operatorname{Fix}(g) = \{x \in X : g \cdot x = x\}$, el conjunto de los elementos fijados por g.

3. Sea G finito y X un conjunto finito con $|X| \geq 2$ y donde actúa G, y supongamos que hay una sola órbita. Probar que existe $g \in G$ tal que $\operatorname{Fix}(g)$ es un conjunto vacío.

4. Sea G finito y H un subgrupo propio de G. Probar que

$$G \neq \bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$$

5. Sea G grupo abeliano finito tal que $\operatorname{Aut}(G)$ es abeliano. Probar que G debe ser cíclico.
Sugerencia: Si $G \cong G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$ como en el teorema fundamental de los grupos abelianos f.g. entonces estudiar $\operatorname{Aut}(G_1 \oplus G_2)$ donde $|G_1|$ divide $|G_2|$.

6. ¿Cuántos subgrupos de orden p^2 tiene el grupo $\mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$?

7. Sean G grupo y $a \in G$, con $a \neq e_G$ y $|a| \neq 2$. Mostrar que existe un automorfismo distinto de la identidad. Si G es finitamente generado, caracterizar los grupos donde esto ocurre. ¿Qué pasa si G no es un grupo finitamente generado?

8. Sea G un grupo finitamente generado, digamos $G =< g_1, \ldots, g_n >$. Probar los siguientes enunciados
   - Si H es un subgrupo de G de índice finito entonces H también debe ser finitamente generado. ¿Qué se puede decir si omitimos la hipótesis sobre el índice?
   - Sea n un número natural. La cantidad de subgrupos de G de índice n es finita.

9. Sea G un p-grupo finito (p un número primo) y con la propiedad de tener a lo más un subgrupo de cada tamaño, entonces G es cíclico.

10. Sea G un grupo finito, no necesariamente abeliano ni p-grupo. G es cíclico si y solamente si tiene a lo más un subgrupo de cada tamaño.

11. Sea G un grupo finito. Si $\operatorname{Aut}(G)$ es un grupo cíclico entonces G es un groupo cíclico de orden 1, 2, 4, $2p^k$ ó p^k con p primo impar y $k \geq 1$. ¿Qué puede decir del recíproco?

12. Todo grupo de orden pq con p y q primos distintos, $p > q$, es de la forma $\mathbb{Z}_p \rtimes_\phi \mathbb{Z}_q$ ($\phi : \mathbb{Z}_q \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_p)$ es un homomorfismo).
[Sugerencia: Estudiar [Proposition II 6.1, Hungerford][1]]

13. Sea G un grupo de orden p^3, con p primo.
   (i) Si G posee más de un subgrupo normal de orden p, entonces G es abeliano y no cíclico.
   (ii) Si G es no abeliano, entonces $|C(G)| = p$.

   [Nota: Se puede probar que, si $p \neq 2$, entonces los grupos no abelianos de orden p^3 son $\operatorname{Heis}(\mathbb{Z}_p)$ (el grupo de Heisenberg con entradas en $\mathbb{Z}_p$) y $\mathbb{Z}_{p^2} \rtimes_\phi \mathbb{Z}_p$ donde ϕ es dada por la acción de $\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_{p^2}$ definida como $\overline{a} \cdot [x] = [(ap + 1)x]$ con $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p$ y $[x] \in \mathbb{Z}_{p^2}$][2]

14. Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G, y sea p un primo que divide a $|H|$. ¿Qué puede decir entre los p-subgrupos de Sylow de H y G?

[1] Thomas William Hungerford. Algebra. Graduate Texts in Mathematics , Volume 73 (GTM 73). Duodécima Impresión, Springer-Verlag, New York (2003)
[2] David S. Dummit, Richard M. Foote. Abstract Algebra. 3rd Edition, Wiley (2013)