Práctico 5

1. (a) Sea $(G, +)$ un grupo abeliano. Definimos la siguiente operación en G: $a \cdot b = 0$, para todo a, $b \in G$. Probar que $(G, +, \cdot)$ es un anillo.

   (b) Sea U un conjunto no vacío. Sea S el conjunto de todos los subconjuntos de U. Para A, $B \in S$ definimos:

   $$A + B := (A - B) \cup (B - A) \qquad \text{y} \qquad AB := A \cap B.$$

   Entonces S es un anillo. ¿Es conmutativo? ¿Tiene identidad?

2. Un *anillo de Boole* es un anillo R tal que $a^2 = a$, para todo $a \in R$. Probar que todo anillo de Boole es conmutativo y $a + a = 0$, para todo $a \in R$.

3. Sea R anillo finito con más de un elemento y sin divisores de cero. Probar que R es un anillo de división.

4. Sea R un anillo y denotemos por $\mathrm{char}(R)$ la característica de R. Supongamos que R tiene identidad 1_R. Probar las siguientes afirmaciones.

   (a) Si $\mathrm{char}(R) = n$, con $n > 0$, entonces $n = \min\{j \in \mathbb{N} : j.1_R = 0\}$.

   (b) Si R no tiene divisores de cero, entonces $\mathrm{char}(R)$ es primo.

5. Sea R un anillo conmutativo con identidad y $\mathrm{char}(R) = p$, con p primo. Probar que $(a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n}$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a, $b \in R$.

6. Sea R un anillo conmutativo y a, $b \in R$ elementos nilpotentes. Probar que $a + b$ es nilpotente. Mostrar que este resultado puede ser falso si R no es conmutativo.

7. Sea R un anillo. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

   (a) R no tiene elementos nilpotentes distintos de cero.

   (b) si $a \in R$ y $a^2 = 0$, entonces $a = 0$.

8. (a) Dar un ejemplo de un homomorfismo de anillos no nulo $f : R \to S$, con R y S anillos con identidad, tal que $f(1_R) \neq 1_S$.

   (b) Sea $f : R \to S$ un epimorfismo de anillos con identidad. Probar que $f(1_R) = 1_S$.

   (c) Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos con identidad y u una unidad en R tal que $f(u)$ es una unidad en S. Probar que $f(1_R) = 1_S$ y $f(u^{-1}) = f(u)^{-1}$.

9. Determinar todos los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Z}_6$ en $\mathbb{Z}_6$, y de Z_{20} en Z_{30}. ¿Qué puede decir en general sobre los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Z}_m$ en $\mathbb{Z}_n$?
   [Hint: El Ejercicio 16 en adicionales puede servir para la pregunta en general.]

10. El conjunto de todos los elementos nilpotentes en un anillo conmutativo es un ideal.

11. Sea R un anillo y $a \in R$. Mostrar que $J := \{r \in R : ra = 0\}$ es un ideal a izquierda de R y que $K := \{r \in R : ar = 0\}$ es un ideal a derecha de R.

12. Sea I un ideal en un anillo R. Definimos $[R : I] := \{r \in R : xr \in I$, para todo $x \in R\}$. Probar que $[R : I]$ es un ideal en R que contiene a I.

13. Sea S el anillo de todas las matrices 2×2 sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Probar que:

    (a) el centro de S son las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

    (b) el centro de S no es un ideal en S.

    (c) Calcular el centro del anillo de matrices $n \times n$ sobre un anillo de división.

14. Probar las siguientes afirmaciones.
    (a) La imagen homomorfa de un anillo de ideales principales es también un anillo de ideales principales.
    (b) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_n$ son anillos de ideales principales.
15. Sea R un anillo conmutativo y N el ideal de todos los elementos nilpotentes. Demostrar que R/N es un anillo sin elementos nilpotentes excepto el elemento nulo.
16. Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos, I ideal en R y J ideal en S.
    (a) Probar que $f^{-1}(J)$ es un ideal en R que contiene a $\ker f$.
    (b) Si f es epimorfismo, entonces $f(I)$ es un ideal en S. ¿Sería esto cierto si no se pide que f sea epimorfismo?
    (c) Si R es anillo de ideales principales y $f : R \to S$ es un epimorfismo, entonces S es anillo de ideales principales.
17. Sea $f : R \to S$ un epimorfismo de anillos. Probar las siguientes afirmaciones.
    (a) Si P es ideal primo en R y $\ker f \subseteq P$, entonces $f(P)$ es un ideal primo en S.
    (b) Si Q es ideal primo en S, entonces $f^{-1}(Q)$ es un ideal primo en R y $\ker f \subseteq f^{-1}(Q)$.
    (c) Existe una correspondencia 1-1 entre el conjunto de todos los ideales primos en R que contienen a $\ker f$ y el conjunto de todos los ideales primos en S, dada por $P \mapsto f(P)$.
    (d) Sea I un ideal (resp. ideal primo) en R. Cada ideal (resp. ideal primo) en R/I es de la forma J/I, donde J es un ideal (resp. ideal primo) en R que contiene a I.
18. Sea I un ideal en $\mathbb{Z}$, con $I \neq 0$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
    (a) I es primo.
    (b) I es maximal.
    (c) $I = (p)$, con p primo.
19. Determinar todos los ideales primos y todos los ideales maximales en $\mathbb{Z}_m$.
20. Considere el anillo $\mathbb{Z}_m$ y sea p un primo que divide a m. Pruebe que el anillo $\mathbb{Z}_m/(\overline{p})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.
21. Sean R_1 y R_2 anillos y considere $S := R_1 \times R_2$ con las operaciones suma y producto *componente a componente*. Pruebe que S es un anillo con estas operaciones. Si adems R_1 y R_2 tienen identidad, pruebe que los ideales de S son de la forma $I_1 \times I_2$ donde I_j es un ideal de R_j. ¿Qué puede decir sobre los ideales primos y maximales de S? ¿Qué puede decir si los anillos no tienen la identidad?
22. Sea R el anillo (conmutativo con unidad) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donde la suma y el producto están dados *componente a componente*, y sea $I := \{(n, 0) : n \in \mathbb{Z}\}$. Pruebe que I es un ideal de R el cual es un ideal primo pero no es un ideal maximal.
23. Encuentre todos los subcuerpos del cuerpo de los números racionales.
24. ¿Cómo son los ideales de un anillo de división?

Ejercicios Adicionales

1. Sea R un anillo con más de un elemento. Supongamos que para todo $a \in R$, con $a \neq 0$, existe un único $b \in R$ tal que $aba = a$. Probar que
    (a) R no tiene divisores de cero.
    (b) $bab = b$.
    (c) R tiene una identidad.
    (d) R es un anillo de división.
2. Sea R un anillo sin divisores de cero a izquierda y sea $a \in R$ un inverso a izquierda de b. Pruebe que a y b son unidades.
3. Sean R un anillo finito y sea $a \in R$ un inverso a izquierda de b. Pruebe que a y b son unidades.

4. Sea R un anillo finito con identidad $1_R \neq 0$. Pruebe que todo elemento no nulo de R es unidad o un divisor de cero.
   [Hint: Considere el conjunto $\{a^k : k \in \mathbb{N}\}$ donde $a \neq 0$].

5. Sea R un anillo con identidad $1_R \neq 0$ con un número primo de elementos. Pruebe que R debe ser un cuerpo.

6. Sea R un anillo, sean a un elemento nilpotente de R y u una unidad de R que conmuta con a ($ab = ba$). Pruebe que $a + u$ es una unidad de R. En particular, pruebe que $1 + a$ es una unidad de R.

7. Pruebe que $3x^2 + 2$ es una unidad en el anillo de polinomios $\mathbb{Z}_9[x]$.

8. Sean A, B y C anillos conmutativos con identidad, sean $\alpha : A \to C$ y $\beta : B \to C$ homomorfismos de anillos. Pruebe que el conjunto

$$A \times_C B := \{(a, b) \in A \times C : \alpha(a) = \beta(b)\}$$

   es un subanillo de $A \times B$ (llamado el *producto fibrado*).

9. Sea R un anillo con identidad y sea S el anillo de todas las matrices $n \times n$ sobre R. Pruebe que J es un ideal de S si y solo si J es el anillo de todas las matrices $n \times n$ sobre un I donde I es un ideal de R. ¿Qué puede decir si R no tiene identidad?
   [Hint: Note que S tiene a la matriz identidad, y en consecuencia tiene las matrices elementales que *sirven* para permutar filas y columnas de una matriz pre y post multiplicando. El candidato para ser I es el conjunto $\{m[1, 1] : m \in J\}$; pruebe que $J := M(n, I)$].

10. Sea D un dominio de integridad. Pruebe que en $M(n, D)$ el ideal (0) es un ideal primo.

11. Sea R un anillo conmutativo con identidad $1_R \neq 0$ finito. Pruebe que los ideales primos son maximales.

12. Sea R un anillo conmutativo. Un subconjunto no vacío S de R se dice *multiplicativo* si S es cerrado con el producto de R. Pruebe que para cualquier conjunto multiplicativo de R que no contenga al cero, existe un ideal primo de R disjunto con S.

13. Sea R un anillo conmutativo. Probar que la intersección de todos los ideales primos de R es justamente el conjunto los elementos nilpotentes del anillo.

14. Sea R un anillo conmutativo con identidad. Definimos $A := \{r \in R : r \text{ es divisor de cero}\} \cup \{0\}$. Probar que A contiene al menos un ideal primo.

15. (Cohen) Sea R un anillo conmutativo con identidad. Si todo ideal primo de R es finitamente generado entonces TODOS los ideales de R son finitamente generado.

16. Sea $m \in \mathbb{N}$ con descomposición en primos dada por $m = p_1^{k_1} \dots p_t^{k_t}$. Entonces el anillo $\mathbb{Z}_m$ es isomorfo al producto de anillos $\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_t^{k_t}}$.

17. Sea R el anillo de las funciones continuas del intervalo $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, con las operaciones usuales de suma y producto de funciones real valuadas. Pruebe que para todo ideal propio I de R existe por lo menos una $u \in \mathbb{R}$ tal que $f(u) = 0$ para toda $f \in I$. ¿Quiénes son los ideales maximales de R? ¿Son ideales maximales finitamente generados?