Práctico 7

1. Verificar los ejemplos de módulos dados en [Hungerford, IV.1.]

2. Probar los tres teoremas de isomorfismo para módulos.

3. Sean R anillo y M un R-módulo. Probar que:

   (a) si I es ideal a izquierda en R y $S \subseteq M$, $S \neq \emptyset$, entonces $IS := \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \,|\, r_i \in I, x_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$ es un submódulo de M.

   (b) si I es un ideal en R, entonces M/IM es un R/I-módulo con $(r+I)\cdot(x+IM) = rx + IM$.

4. Sea R un anillo con identidad. Probar que todo R-módulo cíclico unitario es isomorfo a un R-módulo de la forma R/J, donde J es un ideal a izquierda de R.

5. Sea M un R-módulo y $f : M \to M$ un homomorfismo de R-módulos tal que $f \circ f = f$. Probar que $M = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

6. (a) Un conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_n\}$ en un espacio vectorial V sobre un anillo de división es linealmente dependiente si y sólo si existe k, con $1 \leq k \leq n$, tal que x_k es combinación lineal de los x_i precedentes.

   (b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   - Si $\{x_1, x_2, x_3\}$ es linealmente independiente en V, entonces $\{x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1\}$ es linealmente independiente,
   - $\operatorname{char} R \neq 2$.

7. Sean R anillo conmutativo con identidad y M un R-módulo unitario. Probar que existe un R-módulo libre F y un submódulo K de F tal que $F/K \cong M$. Mostrar que si M está generado por n elementos, entonces se puede elegir F finitamente generado.

8. Sean R, S, T anillos de división tales que $R \subset S \subset T$. Probar que $\dim_R T = \dim_S T \dim_R S$.

9. Sea R un DIP, M un R-módulo unitario y $p \in R$ elemento primo. Sean $pM := \{px \,|\, x \in M\}$ y $M[p] := \{x \in M \,|\, px = 0\}$. Probar que:

   (a) $R/(p)$ es un cuerpo.

   (b) pM y $M[p]$ son submódulos de M.

   (c) M/pM es un espacio vectorial sobre $R/(p)$ con $(r + (p)) \cdot (x + pM) = rx + pM$.

   (d) $M[p]$ es un espacio vectorial sobre $R/(p)$ con $(r + (p)) \cdot x = rx$.

10. Probar que:

    (a) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ y $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$.

    (b) No existe cuerpo $\mathbb{K}$ distinto de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{R} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$.

11. Sea R un anillo con identidad, F módulo libre sobre R y $n \in \mathbb{N}$. Probar que si F tiene una base de cardinalidad n y otra base de cardinalidad de $n+1$, entonces F tiene una base de cardinalidad m, para todo $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq n$.

12. Sean $\mathbb{F}$ cuerpo, V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que:

    (a) V es un $\mathbb{F}[x]$-módulo con la acción dada por $f \cdot v = f(T)(v)$, para todo $f \in \mathbb{F}[x]$, $v \in V$.

    (b) $S \subset V$ es un $\mathbb{F}[x]$-submódulo si y sólo si S es un $\mathbb{F}$-subespacio vectorial y $T(S) \subset S$.

    ¿Es V un $\mathbb{F}[x]$-módulo de torsión?

13. Sea R anillo y sean M, N y P R-módulos. Probar que:

$$\operatorname{Hom}_R(M \oplus N, P) \cong \operatorname{Hom}_R(M, P) \times \operatorname{Hom}_R(N, P),$$
$$\operatorname{Hom}_R(M, N \times P) \cong \operatorname{Hom}_R(M, N) \times \operatorname{Hom}_R(M, P),$$

como grupos abelianos.

14. Sean R anillo y A, B R-módulos. Probar que:
   (i) $\operatorname{Hom}_R(A, B) := \{f : A \to B \mid f$ es homomorfismo de R-módulos$\}$ es un grupo abeliano con la operación suma dada por $(f+g)(a) := f(a) + g(a)$, para todo $a \in A$, f, $g \in \operatorname{Hom}_R(A, B)$.
   (ii) $\operatorname{Hom}_R(A, A)$ es un anillo con identidad, donde la multiplicación es la composición de funciones. $\operatorname{Hom}_R(A, A)$ se llama el *anillo de endomorfismo de* A.
   (iii) A es un $\operatorname{Hom}_R(A, A)$-módulo a izquierda unitario con $f \cdot a = f(a)$.

15. (a) Si A es grupo abeliano y $m \in \mathbb{N}$, entonces $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, A) \cong A[m] = \{a \in A \mid ma = 0\}$.
   (b) $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$. Qué puede decir de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_t}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ con $t = mcm(m, n)$?
   (c) El módulo dual del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_m$ es trivial, o sea $\mathbb{Z}_m^* = 0$.
   (d) Para todo $k \geq 1$, $\mathbb{Z}_m$ es un $\mathbb{Z}_{mk}$-módulo; además, $\mathbb{Z}_m^* \cong \mathbb{Z}_m$ como $\mathbb{Z}_{mk}$-módulos.

16. Sea R anillo con identidad y sean A, B, C y D R-módulos. Probar que si $0 \to A \to B \to C$ es una sucesión exacta, entonces $0 \to \operatorname{Hom}_R(D, A) \to \operatorname{Hom}_R(D, B) \to \operatorname{Hom}_R(D, C)$ es una sucesión exacta de grupos abelianos. Dar un ejemplo de una sucesión exacta $A \to B \to C \to 0$ tal que $\operatorname{Hom}_R(D, A) \to \operatorname{Hom}_R(D, B) \to \operatorname{Hom}_R(D, C) \to 0$ no sea exacta.

17. Sean A y B grupos abelianos. Entonces
   (a) Para cada $m > 0$, $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \cong A/mA$.
   (b) $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_c$ con $c = \operatorname{mcd}(m, n)$.
   (c) Describa $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ cuando A y B son grupos abelianos finitamente generados.
   (d) Si A es un grupo abeliano de torsion y $\mathbb{Q}$ el grupo aditivo de los números racionales $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.
   (e) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

18. Sea R un anillo conmutativo con identidad tal que cada submódulo de cada R-módulo libre es libre. Probar que R es DIP.

19. Sea R un DIP y A un R-módulo unitario cíclico de orden r. Entonces
   (a) Todo submódulo de A es cíclico con orden dividiendo a r.
   (b) Para cualquier divisor de s de r, A tiene exactamente un submódulo cíclico de orden s.

20. Sea R anillo. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
   (a) si M es un R-módulo, entonces existe $\operatorname{rank}_R M$.
   (b) si S es subanillo de R y existe $\operatorname{rank}_R M$, entonces existe $\operatorname{rank}_S M$ y $\operatorname{rank}_R M \leq \operatorname{rank}_S M$.
   (c) si S es subanillo de R y existen $\operatorname{rank}_R M$ y $\operatorname{rank}_S M$, entonces $\operatorname{rank}_R M \leq \operatorname{rank}_S M$.
   (d) si M es un R-módulo, N es un R-submódulo y existe $\operatorname{rank}_R M$, entonces existe $\operatorname{rank}_R N$ y $\operatorname{rank}_R N \leq \operatorname{rank}_R M$.
   (e) si M es un R-módulo, N es un R-submódulo y existen $\operatorname{rank}_R M$ y $\operatorname{rank}_R N$, entonces $\operatorname{rank}_R N \leq \operatorname{rank}_R M$.
   (f) $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.
   (g) $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$-módulo libre.
   (h) Imagen homomórfica de un R-módulo de torsión es un R-módulo de torsión.

Ejercicios Adicionales

1. Sea K un anillo con identidad y F un K-módulo libre con basis infinita numerable $\{e_1, e_2, \ldots\}$. Pruebe que $R = \operatorname{Hom}_K(F, F)$ es un anillo de forma natural y que si n es cualquier entero positivo, entonces el R-módulo libre a izquierda R tiene una base de n elementos.

2. Las siguientes condiciones sobre un anillo R [posiblemente con identidad] son equivalentes:
   (a) Todo R-módulo [unitario] es proyectivo.
   (b) Toda secuencia sucesión exacta corta de R-módulos [unitarios] se parte.
   (c) Todo R-módulo [unitario] is inyectivo.

3. Todo espacio vectorial sobre un anillo de division D es tanto un D-módulo inyectivo como sobreyectivo.

4. Sean R y S anillos. Un R-S-*bimódulo* es un grupo abeliano M que tiene estructura de R-módulo a izquierda, de S-módulo a derecha y que satisface $r(xs) = (rx)s$, para todo $x \in M$, $r \in R$ y $s \in S$. Notación:
   - ${}_RM_S$ denotará que M es un R-S-bimódulo.
   - ${}_RM$ denotará que M es un R-módulo a izquierda.
   - M_S denotará que M es un S-módulo a derecha.

   Sean ${}_RA$, ${}_RB_S$, C_R y ${}_SD_R$ (bi)módulos como se indica arriba. Probar que:
   (a) $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ es un S-módulo a derecha con $(f \cdot s)(a) = f(a) \cdot s$.
   (b) $\mathrm{Hom}_R(B, A)$ es un S-módulo a izquierda con $(s \cdot f)(b) = f(b \cdot s)$.
   (c) $\mathrm{Hom}_R(C, D)$ es un S-módulo a izquierda con $(s \cdot f)(c) = s \cdot f(c)$.
   (d) $\mathrm{Hom}_R(D, C)$ es un S-módulo a derecha con $(f \cdot s)(d) = f(d) \cdot s$.
   (e) Si R es conmutativo, entonces $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ es un R-módulo a derecha con $(f \cdot r)(a) = f(r \cdot a)$.

5. Sea R anillo con identidad. Consideremos R con la estructura usual de R-módulo a izquierda y sea $\mathrm{Hom}_R(R, R) = \{f : R \to R \,|\, f \text{ es homomorfismo de } R\text{-módulos a izquierda}\}$. Mostrar que existe un isomorfismo de anillos $\mathrm{Hom}_R(R, R) \cong R^{\mathrm{op}}$, donde R^{op} es el anillo opuesto de R. En particular, esto dice que si R es, además, conmutativo, entonces $\mathrm{Hom}_R(R, R) \cong R$.