UNIVERSIDAD NACIONAL
DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF

Estructuras Algebraicas
Examen 2015-03-05

I. Parte teórica. De los ejercicios (1,2 y 3) se debe hacer sólo el (a) o (b).

(1a) Enunciar y demostrar el teorema que establece la estructura de los subgrupos de $\mathbb{Z}^n$.

(1b) Definir p-grupo y enucnciar el Primer Teorema de Sylow junto con los resultados fundamentales que conducen a su prueba. Elegir alguno de esos resultados y demostrarlo.

(2a) Definir dominio de ideales principales (DIP) y dominio de factorización única (DFU) y demostar que DIP implica DFU.

(2b) Definir polinomio primitivo en $\mathbb{Z}[x]$. Dado $f \in \mathbb{Z}[x]$ primitivo de grado positivo, demostrar f es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ si y sólo si f es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

(3a) Definir sucesión exacta y demostar la versión corta del Lemma de los 5.

(3b) Definir módulo libre y módulo proyectivo. Demostrar que todo módulo libre es proyectivo.

II. Parte Práctica.

(1) Sean p un número primo y $\mathbb{Z}(p^\infty)$ el subgrupo infinito de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ dado por

$$\mathbb{Z}(p^\infty) := \{\overline{a/b} : a, b \in \mathbb{Z}, b = p^k \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$$

llamado el p-grupo de Prüfer. Probar los siguientes enunciados:

(a) Todo subgrupo propio de $\mathbb{Z}(p^\infty)$ es finito y cíclico; de la forma $< \overline{1/p^k} >$ con $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Sean $x_1, x_2, \ldots$ elementos de un grupo abeliano G tales que $|x_1| = p, px_2 = x_1, px_3 = x_2, \ldots, px_{n+1} = x_n, \ldots$ El subgrupo de G generado por los x_i $(i \geq 1)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

(c) Sean G un grupo abeliano y T el conjunto de todos los elementos de G con orden finito. Entonces T es un subgrupo de G isomorfo a la suma directa

$$\sum_{p \in \mathfrak{P}} G(p)$$

donde $\mathfrak{P}$ es el conjunto de todos los números primos y $G(p)$ es el subgrupo de G dado por $G(p) := \{u \in G : |u| = p^n \text{ para algún } n \geq 0\}$.

(d) Sea G un grupo abeliano. Entonces G/pG es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$ con $\overline{n} \cdot [g] := [ng]$ para todo $\overline{n} \in \mathbb{Z}_p$ y $[g] \in G/pG$. Recordar que pG es el subgrupo de G dado por $pG := \{pg : g \in G\}$.

(e) Sea G un grupo abeliano infinito tal que todos sus subgrupos propios son finitos. Entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z}(p^\infty)$ para algún número primo p.

(2) Probar sólo el (a) ó (b)

(a) El conjunto formado por los divisores de cero junto con el cero en un anillo conmutativo con identidad contiene al menos un ideal primo.

(b) Enunciar y probar el criterio de Eisenstein.

(3) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si H y K son subgrupos de índice finito en un grupo G tales que $[G : H]$ y $[G : K]$ son coprimos, entonces $G = HK$.

(b) Todo dominio de factorización única es un dominio de ideales principales.

(c) Sea R un anillo conmutativo con identidad. Todo submódulo de un R-módulo libre es libre.

(d) Sea G el grupo $\mathbb{Z}^2$ y H el subgrupo generado por $\{(2,0),(0,3)\}$. Entonces el índice de H en G es 6.

(e) Sea G un grupo tal que $\mathrm{Aut}(G)$ es cíclico. Entonces G es un grupo abeliano.

(f) Todo grupo de orden p^2 (con p primo) es un grupo abeliano.