Estructuras Algebraicas
Examen 2015-07-27

I. Parte teórica. De los ejercicios (1,2 y 3) se debe hacer sólo el (a) o (b).

(1a) Sean G un grupo finito y C su centro. Dado $x \in G$ sea C_x la clase de conjucación de x. Demostrar que $|C_x|$ divide a $|G|$ y que $|G| = |C| + |C_{x_1}| + \cdots + |C_{x_m}|$ donde $\{C_{x_j} : j = 1, \ldots, m\}$ son exactamente las clases de conjugación en G que contienen más de un elemento.

(1b) Describir todos los grupos abelianos de orden 1500. Decir por qué $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ no es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$. ¿Es $(\mathbb{Q}, +)$ isomorfo a $(\mathbb{Q}_{>0}, \times)$? ¿Es $(\mathbb{Q}, +)$ isomorfo a una suma directa de $\mathbb{Z}$'s?

(2a) Definir los conceptos de elemento primo y elemento irreducible, dar ejemplos de unos que no son de los otros, y decir en qué contexto uno de los conceptos implica el otro y demostrar alguna de esas implicaciones.

(2b) Definir dominio de factorización única (DFU) y demostar que si R es DFU, entonces $R[x_1, \ldots, x_n]$ es DFU.

(3a) Definir sucesión exacta y demostar la versión corta del Lemma de los 5.

(3b) Enunciar el Teorema de estructura de módulos f.g. sobre DIP. Deducir de este teorema los Teoremas de descomposición primaria y cíclica de transformaciones lineales.

II. Parte Práctica.

(1) Sea $D_n = \{1, r, \ldots, r^{m-1}, s, sr, \ldots, sr^{m-1}\}$ el grupo diedral de orden $2n$ ($D_1 = \mathbb{Z}_2$ y $D_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$). Con $n \geq 3$, probar las siguientes afirmaciones:

(a) Sea m un divisor de n. Probar que $< r^m >$ es un subgrupo normal de D_n.

(b) Probar que $D_n / < r^m > \cong D_m$.

(c) Probar que el centro de D_n es trivial si n es impar y es $\{e, r^{\frac{n}{2}}\}$ si n es par.

(d) Probar que si n es impar, no hay más subgrupos normales de D_n distintos a los dados arriba y que si n es par, se tienen además dos subgrupos normales de D_n; $< r^2, s >$ y $< r^2, rs >$.

(e) Probar que $\mathrm{Aut}(D_4)$ es isomorfo a D_4.

(f) Dar explícitamente los homomorfismos de D_4 a $\mathbb{Z}_8$.

(g) Sea p un número primo impar divisor de $|D_n|$. Probar que cualquier p-subgrupo de Sylow de D_n es normal y cíclico.

(2) Probar sólo el (a) ó (b)

(a) Sea R el anillo de las funciones continuas del intervalo $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, con las operaciones usuales de suma y producto de funciones real valuadas. Dado $u \in [0, 1]$, sea $M_u = \{f \in R : f(u) = 0\}$. Probar que los ideales maximales de R son de la forma M_u.

(b) Enunciar y probar el criterio de Eisenstein.

(3) Sea R un DIP y A un R-módulo unitario cíclico de orden r. Entonces

(a) Todo submódulo de A es cíclico con orden dividiendo a r.

(b) Para cualquier divisor s de r, A tiene exactamente un submódulo cíclico de orden s.

(4) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Sea p un número primo. El anillo $\mathbb{Z}_p[\sqrt{-1}]$ (con las operaciones canónicas) es un cuerpo.

(b) Si M es un módulo sobre el anillo $\mathbb{Z}_{p^n}$ con p primo y M es un conjunto finito, entonces el cardinal de M es alguna potencia de p.

(c) Un grupo donde todos sus elementos tienen orden finito debe ser un grupo finito.

(d) Si todo p-subgrupo de Sylow de un grupo finito G es normal para todo p, entonces G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.

(e) Si R es un anillo tal que el único automorfismo de anillo de R es la identidad, entonces el conjunto de todos los elementos nilpotentes de R es un ideal de R.