Final
17 de Diciembre de 2015

I. **Parte teórica.** De cada uno de estos tres ejercicios se debe hacer sólo el (a) o (b).

(1a) Enunciar y demostrar el teorema que establece la existencia de la forma normal de Smith de una matriz entera.

(1b) Enunciar y demostrar el Teorema de Cauchy.

(2a) Definir ideal maximal, enunciar el Lemma de Zorn y enunciar y demostrar el resultado que establece que todo ideal está contenido en un ideal maximal.

(2b) Definir dominio euclídeo (DE), dominio de ideales principales (DIP) y demostar que DE implica DIP.

(3a) Demostrar que si R es DIP, todo submódulo de un módulo libre finitamente generado es libre. Dar un ejemplo que muestre que el resultado es falso si R no es DIP.

(3b) Definir módulo libre y módulo proyectivo. Demostrar que todo módulo libre es proyectivo.

II. **Parte práctica.**

(1) a) Sean N, H grupos y $\phi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ un homomorfismo de grupos. Sea G el producto cartesiano de H con N, $H \times N$, y definamos en este conjunto la operación binaria

$$(h_1, n_1) \cdot (h_2, n_2) = (h_1 h_2, n_1 \phi(h_1)(n_2)).$$

Demostrar que G es un grupo (llamado el producto semidirecto de H y N denotado por $H \ltimes_\phi N$) y que la copia natural de N en G es un subgrupo normal.

b) Considere el homomorfismo de grupos $\phi : \mathbb{Z}_4 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_7)$ que a cada $\overline{k} \in \mathbb{Z}_4$, $\phi(\overline{k})([x]) = (-1)^k [x]$ y sea $G := \mathbb{Z}_4 \ltimes_\phi \mathbb{Z}_7$. ¿Cuántos 2 y 7 subgrupos de Sylow tiene G? Si H es cualquier 2-subgrupo de Sylow de G ¿es H isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

(2) Sea $\mathbb{Z}[\imath]$ el anillo de los enteros Gaussianos. Pruebe que $1+\imath$ es un primo de $\mathbb{Z}[\imath]$ e identifique el anillo cociente $\mathbb{Z}[\imath]/(1+\imath)$ con uno de los siguiente anillos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2$.

(3) Sean $\mathbb{F}$ cuerpo, V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que:

a) V es un $\mathbb{F}[x]$-módulo con la acción dada por $f \cdot v = f(T)(v)$, para todo $f \in \mathbb{F}[x]$, $v \in V$.

b) $S \subset V$ es un $\mathbb{F}[x]$-submódulo si y sólo si S es un $\mathbb{F}$-subespacio vectorial y $T(S) \subset S$.

c) Si V es de dimensión finita ¿Es V un $\mathbb{F}[x]$-módulo de torsión, es decir que para todo $v \in V$ existe $f \in F[x]$ tal que $f \cdot v = 0$?

d) Demostrar que si $V = \mathbb{R}^2$ y T no es múltiplo de la identidad, entonces existe un $v \in V$ tal que el $\mathbb{F}[x]$-módulo V está generado v.

(4) En los siguientes enunciados determinar si son verdaderos ó falsos. Jusitificar

a) En todo grupo cíclico hay a lo más un elemento de orden 2.

b) El polinomio $x^2 + 1$ es reducible en $\mathbb{Z}_5[x]$.

c) Sea R un anillo conmutativo con $1_R \neq 0$ e I, J ideales de R. Si los R-módulos R/I y R/J son isomorfos, entonces $I = J$.