Estructuras Algebraicas
Examen 03 de Marzo de 2016

I. Parte Teórica. De los ejercicios (1,2 y 3) se debe hacer sólo el (a) o (b). Cada ejercicio vale 3,5 pts.

(1a) Enunciar y demostrar el teorema que establece la existencia de la forma normal de Smith de una matriz entera.

(1b) Describir todos los grupos abelianos de orden 1500. Decir por qué $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ no es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$. ¿Sea $n \geq 4$, es D_n isomorfo a S_m para algún m? ¿Es $(\mathbb{Q}, +)$ isomorfo a una suma directa de $\mathbb{Z}$'s?

(2a) Definir ideal maximal, enunciar el Lemma de Zorn y enunciar y demostrar el resultado que establece que todo ideal está contenido en un ideal maximal.

(2b) Definir dominio de factorización única (DFU) y demostar que si R es DFU, entonces $R[x_1, \ldots, x_n]$ es DFU.

(3a) Definir R-módulo proyectivo y demostrar que P es un R-módulo proyectivo si y solo si es sumando directo de un R-módulo libre. Dar algún ejemplo de R-módulo proyectivos no libre.

(3b) Enunciar el Teorema de estructura de módulos f.g. sobre DIP. Deducir de este teorema los Teoremas de descomposición cíclica y forma de Jordan de transformaciones lineales.

II. Parte Práctica. Cada ejercicio vale 2,7 pts.

1. a) Expresar la permutación $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ como producto de ciclos disjuntos y como producto de transposiciones.

   b) Sean G un grupo finito de orden $|G| = nm$, $\mathbb{A}(G) \simeq S_{nm}$ las biyecciones de G y $\pi : G \to \mathbb{A}(G)$ la *traslación a izquierda* de G, es decir $\pi(x)(y) = xy$, $x, y \in G$. Sea x un elemento de G de orden n, demostrar que permutación $\pi(x)$ es un producto de m n-ciclos. Además, demostrar que $\pi(x)$ es una permutación impar si y solo si $|x|$ es par y $[G :< x >]$ es impar.

   c) Sean G y π como en el ejercicio anterior. Pruebe que si $\pi(G)$ contiene una permutación impar, entonces G tiene un subgrupo de indice 2.

   d) Sea G un grupo de orden $2k$ con k impar. Pruebe que G no es simple.

2. Denotemos por $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] := \{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ el anillo de los enteros Gaussianos.

   a) Probar que las unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ son ± 1 y $\pm\sqrt{-1}$.

   b) Sea $z = a + b\sqrt{-1}$ un entero Gaussiano no nulo y $\overline{z}$ su conjugado. Probar que los ideales (z) y $(\overline{z})$ coinciden si y solo si $ab = 0$ o $a^2 - b^2 = 0$.

   c) Sea $z = a + b\sqrt{-1}$ un entero Gaussiano no nulo tal que $a^2 + b^2$ es un número primo. Probar que z es un primo Gaussiano. Dar 1 ejemplo de primo Gaussiano que satisfaga el enunciado y un ejemplo de primo Gaussiano que no lo satisfaga.

   d) Factorizar los enteros Gaussiano 10 y $1 + 3\sqrt{-1}$ como producto de primos Gaussianos.

3. a) Sea R un anillo e I un ideal de R. Pruebe que el anillo cociente R/I es R un R-módulo con $r \cdot \overline{v} := \overline{rv}$.

   b) Sean R un dominio de ideales principales y $f, g \in R$ primos relativos. Pruebe que la función $\varphi : R \longrightarrow R/(f) \times R/(g)$, $\varphi(x) := (\overline{x}, [x])$, es un homomorfismo de R-módulos. Usando el hecho que φ es una función sobreyectiva, deduzca un isomorfismo de R-módulos entre $R/(f) \times R/(g)$ y $R/(fg)$.

   c) Sea $V = \mathbb{Z}_2[x] \times \mathbb{Z}_2[x]$ el $\mathbb{Z}_2[x]$-módulo libre de rango 2 y considere W el submódulo de V generado por $\{(x, 0), (0, x + 1)\}$. Dar una base de V, $\{v_1, v_2\}$, el natural $k \leq 2$ y polinomios $d_1, \ldots, d_k$ en $\mathbb{Z}_2[x]$ tales que $\{d_1 \cdot v_1, \ldots, d_k \cdot v_k\}$ es una base de W. ¿Es el $\mathbb{Z}_2[x]$-módulo cociente V/W un $\mathbb{Z}_2[x]$-módulo cíclico?

   d) Sea $R := \mathbb{Z}_2[x]$ el anillo de polinomios en una variable con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$. Clasificar, salvo isomorfismo, todos los R-módulos con 4 elementos.

4. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   a) El grupo $(\mathbb{Q}, +)$ es isomorfo a $(\mathbb{Q}_{>0}, \times)$.

   b) Sean R y S anillos, no necesariamente con identidad. Los ideales del anillo producto $R \times S$ son de la forma $I \times J$ con I ideal de R y J ideal de S.

   c) Sea R un anillo conmutativo, no necesariamente con identidad y sean I, J ideales de R. Si los R-módulos R/I y R/J son isomorfos, entonces $I = J$.