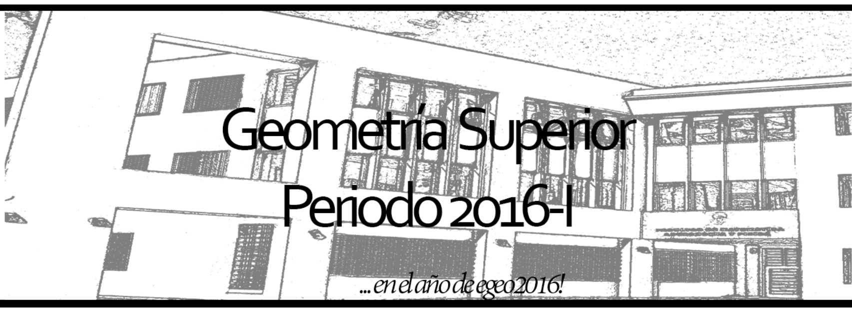

Primer parcial

8 de abril de 2016

Nombre y apellido:

1. Sea $G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a > 0,\ b > 0\}$ y consideremos la operación binaria sobre G

$$(a_1, b_1, c_1) \star (a_2, b_2, c_2) := (a_1a_2, b_1b_2, a_1c_2 + c_1b_2)$$

   (a) Probar que G es un grupo con esta operación.

   (b) Si a G se le da la estructura de variedad diferenciable como conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$, probar que G con esta estructura es un grupo de Lie.

2. Sea $M = (\mathbb{C} \setminus \{0\})/_\sim$, donde $z \sim w$ si y sólo si $w = \exp(m)z$ para cierto $m \in \mathbb{Z}$. Considerar en M la única estructura diferenciable tal que la proyección canónica $\pi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to M$ es un difeomorfismo local.

   (a) Mostrar que

$$f : M \to \mathbb{R}, \qquad f([z]) = \cos(2\pi \log(\|z\|)),$$

   está bien definida y es suave.

   (b) Sean $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $q = \exp(m)p$. Consideremos los siguientes vectores tangentes

$$u = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p \qquad \text{y} \qquad v = \exp(m) \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_q .$$

   Probar que $(d\pi)_p u = (d\pi)_q v$ (acá (x, y) son las coordenadas usuales de $\mathbb{C}$).

   (c) Determinar todos los puntos críticos de f.

3. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z) = (x\cos(z) - y\sin(z), x\sin(z) + y\cos(z), z)$$

   (a) Es directo probar que $\widetilde{f} := f|_{S^2}$ es un difeomorfismo de S^2 en S^2. Comprobar esta afirmación para el caso del casquete superior de S^2, U_3^+; es decir, que la restricción de f a U_3^+ es una función suave la cual es difeomorfismo.

   (b) Probar que $\widetilde{f}$ restringida al paralelo de S^2 dado por $z = 0$ es la función identidad pero $(d\widetilde{f})_p$ no es la identidad para todo punto p en tal paralelo.

4. (a) Probar que la composición de funciones suaves es una función suave.

   (b) Sea M una variedad suave y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Probar que un *máximo local* de f es un *punto crítico* de f.

   (c) Sea M una variedad diferenciable compacta y sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Probar que f tiene al menos dos puntos críticos.