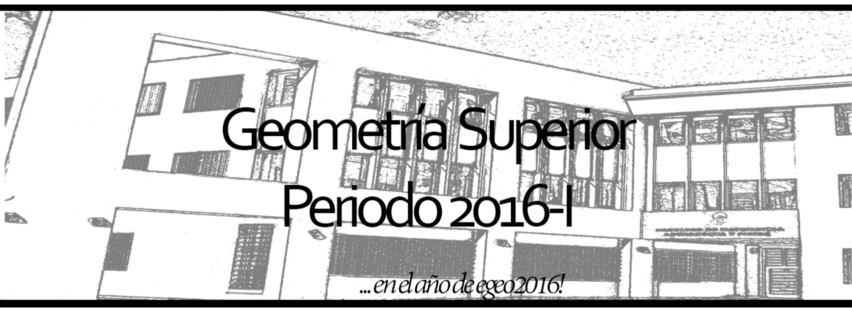

FAMAF

Segundo parcial

11 de Mayo de 2016

Nombre y apellido:

1. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el paraboloide $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ y sea W el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ definido por
$$W = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z}.$$
   (a) Probar que M es una subvariedad incrustada de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Sean $S = (-\pi/4, \pi/2)$ y $f : S \to M$ dada por $f(t) := \sin(2t)(\cos(t), \sin(t), \sin(2t))$. Probar que (S, f) es una subvariedad de M y que no es incrustada.
   (c) Probar que W es tangente a M e induce por restricción un campo V en M.
   (d) Determinar las curvas integrales de V. ¿Es V completo?

2. Sean α y β constantes en $\mathbb{R}$ y $H := (\mathbb{R}^3, \star)$ el grupo de Lie con producto dado por
$$(a, b, c) \star (x, y, z) = (a + x, b + \exp(\alpha a)y, c + \exp(\beta a)z)$$
   (a) Mostrar que $\mathcal{B} := \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \exp(\alpha x)\frac{\partial}{\partial y}, \exp(\beta x)\frac{\partial}{\partial z}\right\}$ es una base del álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H.
   (b) Determinar todos los corchetes de Lie entre los elementos de la base $\mathcal{B}$.

3. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   (a) Si $\pi : M \to N$ es una submersión entonces para cada punto q en la imagen de π, $q = \pi(p_0)$, existe un entorno V de q en N y una función suave $\sigma : V \to M$ tal que $\sigma(q) = p_0$ y $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_V$.
   (b) Existe $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ suave tal que (S^n, f) es subvariedad de $\mathbb{R}^n$.
   (c) Si $\gamma : (a, b) \to M$ es una curva C^∞ en M, entonces $\gamma' : (a, b) \to TM$, $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$, es una curva C^∞ en TM.