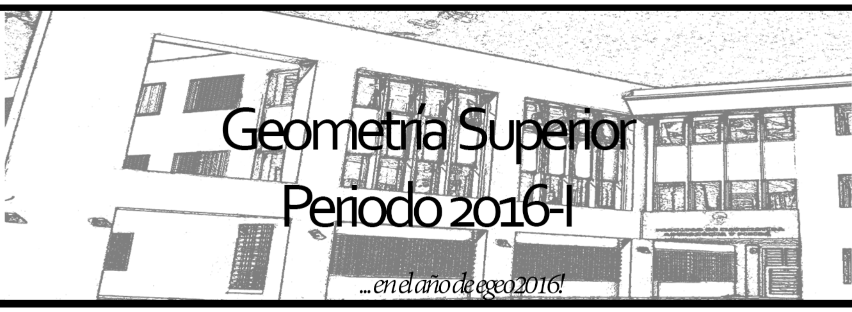

FAMAF

Tercer parcial

10 de Junio de 2016

Nombre y apellido:

1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$, $v_1, \dots, v_k \in V$. Probar que
$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k(v_1, \dots, v_k) = \det(\alpha_i(v_j)).$$

2. Sea M una variedad suave y sea $p \in M$. Si $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es una base de T_p^*M, probar que existe un entorno coordenado $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ alrededor de p tal que $(\mathrm{d}\, x_i)_p = \omega_i$ para todo i.

3. Sea ω una 1-forma suave sobre una variedad suave M. Una función diferenciable nunca nula $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{d}(f\omega) = 0$ se llama un factor integrante de ω.
   (a) Probar que si ω admite un factor integrante, entonces $\omega \wedge \mathrm{d}\,\omega = 0$.
   (b) Dar un ejemplo de una 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ que no admita un factor integrante.

4. Sean X e Y los campos de $\mathbb{R}^3$ definidos por
$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = zx\frac{\partial}{\partial x} + zy\frac{\partial}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$
   (a) Determinar el abierto maximal U de $\mathbb{R}^3$ donde X, Y definen una distribución $\mathcal{D}$ de dimensión 2.
   (b) Verificar que la superficie $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 1\}$ es una subvariedad integral maximal de $\mathcal{D}$.

5. Considerar el campo vectorial $X = x\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$, definido en el octante positivo W de $\mathbb{R}^3$, y sea $\mathcal{D}$ la distribución en W definida por $\mathcal{D}_p = \langle X_p \rangle^{\perp}$. Probar que $\mathcal{D}$ es diferenciable y decidir si es integrable.