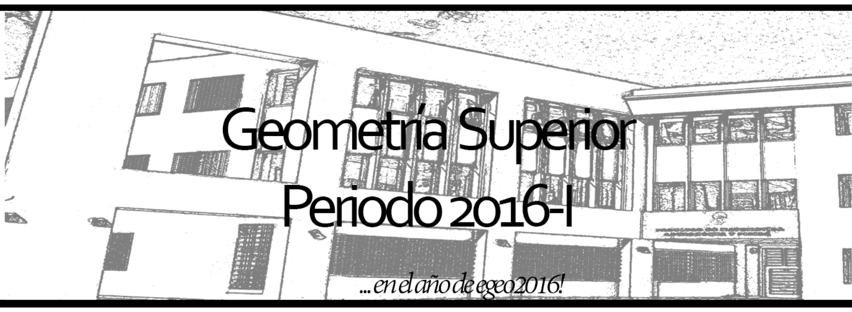


FAMAF

Práctico 1

1 Repaso de análisis en varias variables

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $a \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que si f es diferenciable en a entonces f es continua en a. Muestre además que si $\|f(x)\| \leq \|x\|^2$ en un entorno de 0, entonces f es diferenciable en 0.

2. Defina $f(x)$ sobre $\mathbb{R}$ por
$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x), & \text{para } x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$
Muestre que f es una función $\mathcal{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R}$ y que no es analítica en 0.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(u, v) = (u^2 e^{2v}, u + v^2)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}$ y $(df)_{(3,0)}$. Escribir la aproximación afín de f en $(3, 0)$ y usarla para aproximar $f(3.1, 0.2)$.

4. (a) Sean $u_o \in \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $g(x) = u_o$ para todo x. Mostrar que $(dg)_x$ es la transformación nula.
   (b) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal. Mostrar que $(df)_x = f$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

5. Mostrar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable, entonces
$$(df)_p(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 f(\alpha(t))$$
para cualquier curva α con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función homogénea de orden k. Pruebe que $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$ (Teorema de la función homogénea de Euler).

7. Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un *mapeo bilineal*, esto es, φ es una transformación lineal en cada argumento. Pruebe que φ es una función suave y de una expresión para $(d\varphi)_{(x,y)}$ ¿Que puede decir si φ es un mapeo k-lineal?

8. Sean $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ y $\mathrm{tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ las funciones determinante y traza, respectivamente. Mostrar que $(d\det)_X Y =< \mathrm{cof}(X), Y >= \mathrm{tr}(\mathrm{cof}(X)^t Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(X)Y)$, donde $\mathrm{cof}(X)$ es la *matriz de cofactores* de X y $\mathrm{adj}(X)$ es la matriz adjunta de X.
[Hint: Use la Expansión de Laplace del determinante]

9. Derivando nuevamente el determinante: Muestre que $(d\det)_{\mathrm{id}} Y = \mathrm{tr}(Y)$ para todo Y matrix $n \times n$ y deduzca que para toda matriz invertible X (es decir, $X \in GL(n, \mathbb{R})$), se tiene $(d\det)_X Y = \det(X)\,\mathrm{tr}(X^{-1}Y)$.

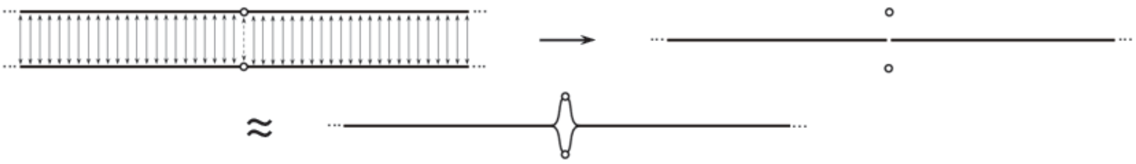
10. Sea $A(t)$ una función diferenciable de los reales a las matrices $n \times n$. Entonces $d(\det(A)) = \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(A)dA)$ (Fórmula de Jacobi) .

11. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$. Muestre que f es $\mathcal{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R}$ pero su inversa no es $\mathcal{C}^\infty$ (a diferencia de lo que sucede en análisis complejo).

2 Variedades diferenciables

1. (a) Mostrar que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ no es un espacio topológico localmente euclídeo.

   (b) Sea X el cociente $(\mathbb{R} \times \{0,1\})/\sim$ de dos copias de $\mathbb{R}$, con la relación de equivalencia $(x,0) \sim (x,1)$ para $x \neq 0$. Mostrar que X, el cual es llamado *la línea con dos orígenes*, es un espacio topológico tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$, pero no es Hausdorff.



2. Mostrar que para todo punto p de una variedad diferenciable de dimensión n existe un sistema coordenado (U, φ) tal que $\varphi(p) = 0$ y $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$.

3. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función $\mathcal{C}^\infty$. Dotar el gráfico de f

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in U\}$$

   con una estructura de variedad diferenciable.

4. Sean $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ y $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ atlas $\mathcal{C}^\infty$ de variedades diferenciable M y N respectivamente. Muestre que la familia $\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ es un atlas de $M \times N$ y por tanto $M \times N$ es una variedad diferenciable llamada *variedad producto*.

5. Sea M una variedad compacta y conexa. ¿Puede M ser cubierta con una sola carta?

6. Sea M el *cilindro infinito*; $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Cubrir a M con una sola carta. [Sugerencia: Relacionar con el cilindro semi-infinito]

7. (a) Sea $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Mostrar que las estructuras diferenciables que contienen las cartas "casquetes" y las cartas "estereográficas" coinciden.

   (b) Mostrar que S^2 con la estructura diferenciable dada en (a) es difeomorfa a $(M, \mathcal{F})$, donde M es la compactificación de los números complejos $\mathbb{C}$ por el punto ∞, y $\mathcal{F}$ es la estructura diferenciable que contiene las cartas (U, φ) y (V, ψ), donde $U = \mathbb{C}$, $\varphi = \mathrm{id}$, $V = (\mathbb{C} - \{0\}) \cup \{\infty\}$ y $\psi(z) = 1/z$ si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $\psi(\infty) = 0$ (hemos identificado $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ de la manera usual).

8. Considerar el cociente $\mathbb{R}P^2$ de S^2 por la relación de equivalencia $\sim$ dada por $x \sim \pm x$. Mostrar que existe una única estructura diferenciable en $\mathbb{R}P^2$ tal que la proyección canónica es un difeomorfismo local.

9. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$ dada por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^2$. Considerar en el cociente T^2 la única estructura diferenciable tal que la proyección es un difeomorfismo local. Mostrar que T^2 es difeomorfo a $S^1 \times S^1$ provisto de la estructura diferenciable producto.

10. Considerar en $\mathbb{R}$ las estructuras diferenciables $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ que contienen respectivamente los sistemas coordenados $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ y $(\mathbb{R}, t \mapsto t^3)$. Mostrar que son difeomorfas pero $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$.

11. Considerar en $\mathbb{C}$ la relación de equivalencia $\sim$ dada por $x \sim e^{i2k\pi/3}x$, $k = 0, 1, 2$. Mostrar que $\mathbb{C}/\sim$ es localmente euclídeo de dimensión 2, que admite una estructura diferenciable, pero que no admite ninguna estructura diferenciable tal que la proyección sea un difeomorfismo local.

12. Mostrar que el cilindro $C = \mathbb{R}^2/\sim$, donde $x \sim x + 2k\pi e_1$, con k entero, es difeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ y a la superficie de $\mathbb{R}^3$ cuya construcción es análoga a la de la banda de Möbius a partir de una cinta, pero dando una vuelta entera, en vez de media vuelta, antes de pegar.

13. Probar que las aplicaciones $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ y $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ definidas por $(A, B) \mapsto AB$ y $A \mapsto A^{-1}$ respectivamente, son diferenciables.

Adicionales

1. Sea $M_1 = S^1 \times \mathbb{R}$ con la estructura diferenciable producto, y sea M_2 la variedad diferenciable dada en el ejercicio 6. ¿Puede probar que M_1 y M_2 son difeomorfas?[1]

2. Dar estructura de variedad diferenciable a los siguientes conjuntos:

   (a) el conjunto de todos los prismas en $\mathbb{R}^3$ de lados paralelos a los ejes y con volumen unitario.

   (b) el conjunto de todas las circunferencias orientadas en la esfera de radio uno en $\mathbb{R}^3$.

   (c) el conjunto de todas las rectas orientadas en el plano.

3. **Acción discontinua de un grupo.** Sea G un subgrupo de difeomorfismos de una variedad diferenciable M. Decimos que la acción de G en M es *propiamente discontinua* si cada $p \in M$ tiene un entorno $U \subset M$ tal que $U \cap g(U) = \emptyset$ para todo $g \neq e$. Sea M/G el conjunto de clases de equivalencia de la relación inducida por la acción de G en M. Supongamos también que dados dos puntos no-equivalentes $p, q \in M$ existen entornos U, V de p y q respectivamente tales que $U \cap g(V) = \emptyset$ para todo $g \in G$.

   (a) Demostrar que el cociente M/G es un espacio localmente euclídeo (de dimensión $\dim M$) que admite una estructura diferenciable que hace de la proyección canónica $\pi : M \to M/G$ un difeomorfismo local.

   (b) Concluir que el espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim$ (en donde $x \sim \pm x$) admite una estructura de variedad diferenciable tal que la proyección $\pi : S^n \to P^n$ es un difeomorfismo local.

[1] Es sabido que en dimensión menor que 4, toda variedad topológica tiene una única estructura diferenciable, salvo difeomorfismo, [Rado y Moise]. No es sabido si S^4 tiene una única estructura de variedad diferenciable (*smooth Poincaré conjecture.*)