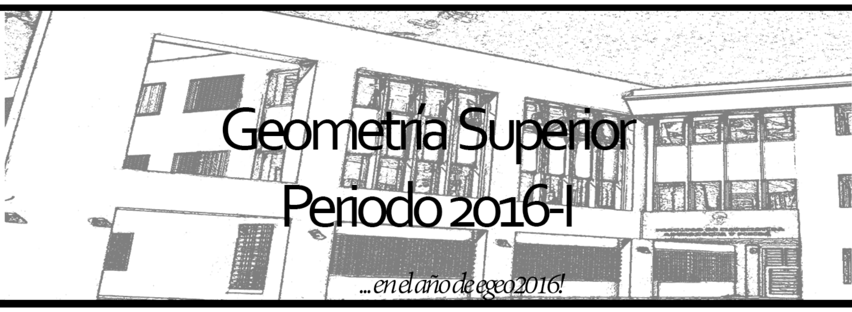

FAMAF

Práctico 2

1 Grupos de Lie

1. ¿Es el grupo $GL(n,\mathbb{R})$ con su producto usual un grupo de Lie? ¿ Qué puede decir acerca de $GL(n,\mathbb{C})$? [Hint: Ver ejercicio en el práctico 1]

2. Sea G el grupo dado por $(\mathbb{R}^3,\star)$ donde el producto $\star$ es definido como

$$X \star Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + x_1 y_2)$$

donde $X = (x_1, x_2, x_2)$ y $Y = (y_1, y_2, y_3)$. Probar que G es un grupo de Lie no abeliano, denominado el grupo de Heisenberg.

3. Sea $K = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ con la estructura diferenciable producto, y la estructura de grupo definida por $(A, v)\cdot(A', v') = (AA', Av' + v)$. Probar que K resulta un grupo de Lie, denominado el grupo de movimientos afines de $\mathbb{R}^n$.

2 Espacio Tangente y Particiones de la Unidad

1. Sea M una variedad diferenciable, I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $\gamma : I \to M$ una curva diferenciable. La velocidad de γ en el instante $t \in I$, que se denota por $\gamma'(t)$, es por definición el vector tangente que satisface $\gamma'(t)(f) = \frac{d}{ds}\Big|_0 f(\gamma(t+s))$ para toda función diferenciable definida en un entorno abierto de $\gamma(t)$ en M.

   (a) Repasar las definiciones para asegurarse que efectivamente $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

   (b) Probar que $\gamma'(t) = (d\gamma)_t \left(\frac{\partial}{\partial s}\Big|_t\right) \in T_{\gamma(t)}M$, donde $\frac{\partial}{\partial s}\Big|_t \in T_t\mathbb{R}$ es el vector tangente a $\mathbb{R}$ en t asociado al sistema coordenado canónico $(\mathbb{R}, \mathrm{id} = s)$.

   (c) Mostrar que si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ es un sistema coordenado de M alrededor de $\gamma(0)$ y $(\varphi \circ \gamma)(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$ para t próximo a cero, entonces

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^{n} r_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(0)}.$$

   (d) Mostrar que para todo $p \in M$ y todo $v \in T_pM$ se cumple que $v = \sigma'(0)$ para alguna curva diferenciable σ en M con $\sigma(0) = p$.

2. Sea π la proyección canónica de S^2 al proyectivo $\mathbb{R}P^2$. Mostrar que la función $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(\pi(x,y,z)) = x^6yz + 3x^4y^3z$ está bien definida y es diferenciable. Probar que $v(f) = 0$ para todo $v \in T_{\pi(1,0,0)}\mathbb{R}P^2$.

3. Sean M y N variedades diferenciables, y sean $\pi_1 : M \times N \to M$ y $\pi_2 : M \times N \to N$ las proyecciones canónicas. Considerar en $M \times N$ la estructura diferenciable producto.

   (a) Mostrar que una función f de una variedad diferenciable en $M \times N$ es diferenciable si y solo si $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ lo son.

   (b) Fijamos $p \in M$ y $q \in N$. Se definen $i_q : M \to M \times N$ por $i_q(p') = (p', q)$, e i_p análogamente. Se definen también las aplicaciones $F : T_pM \times T_qN \to T_{(p,q)}(M \times N)$ por

$$F(X,Y)(f) = X(f \circ i_q) + Y(f \circ i_p),$$

y $G : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \times T_qN$ por

$$G(v) = (d\pi_1(v), d\pi_2(v)).$$

Mostrar que, en efecto, $F(X,Y) \in T_{(p,q)}(M \times N)$. Probar que $G \circ F = \mathrm{id}_{T_pM \times T_qN}$ y deducir de allí que $T_{(p,q)}(M \times N)$ y $T_pM \times T_qN$ son isomorfos.

4. Sea $(\mathbb{R}^3, \mathrm{id} = (x,y,z))$ el sistema coordenado canónico de $\mathbb{R}^3$. Encontrar otro sistema coordenado $(\mathbb{R}^3, \varphi = (\xi, \eta, \zeta))$ con $x = \xi$ pero tal que $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_0 \neq \frac{\partial}{\partial \xi}\Big|_0$. De hecho, usualmente abusamos de la notación no escribiendo a cuál sistema coordenado corresponde un vector tangente dado. Cuando esto no está claro, como en este caso, conviene indicarlo, por ejemplo, con un supraíndice,

$$\frac{\partial^{\mathrm{id}}}{\partial x}\Big|_0, \qquad \frac{\partial^{\varphi}}{\partial \xi}\Big|_0.$$

5. (a) Sean M, N variedades suaves y $F : M \to N$ una función suave, con M conexa. Probar que $(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es la transformación nula para todo $p \in M$ si y solo si F es una función constante.
   (b) Sea M variedad suave y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Probar que un *máximo local* de f es un *punto crítico* de f; es decir $(df)_p$ es la transformación nula.

6. Para cada uno de los vectores tangentes del plano, dar su representación en términos de coordenadas polares en el semiplano derecho:$= \{p = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
   (a) $X|_p = x\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + y\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p$
   (b) $Y|_p = x\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p - y\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p$
   (c) $Z|_p = (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p$

7. Exprese el vector tangente de $p = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$

$$X|_p = xy^2z\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + x^2yz\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + xyz^2\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$$

   en coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas.

8. Sea $p \in S^2 \setminus \{n, s\}$ y considere el vector tangente $X_p = (v^2 - u^2)\frac{\partial}{\partial u}\Big|_p - 2uv\frac{\partial}{\partial v}\Big|_p$ el cual está escrito en términos de las cordenadas de la proyección estereográfica desde el polo sur s. Escribir a X_p en términos de las coordenadas de la proyección estereográfica desde el polo norte n.

9. Sea G un grupo de Lie.
   (a) Sea m la multiplicación de G. Mostrar que $(dm)_{(e,e)}(X,Y) = X + Y$.
   [Hint: Calcular primero $(dm)_{(e,e)}(X,0)$ y $(dm)_{(e,e)}(0,Y)$]
   (b) Sea ι la *función inversión*. Mostrar que $(d\iota)_e X = -X$.
   [Hint: Derivar $\gamma(t) = m(c(t), \iota(c(t))) = e$.]

10. Sea S^3 la esfera unidad de $\mathbb{C}^2$ y sea S^2 vista como la esfera de Riemann (la compactificación de $\mathbb{C}$). Considere la fibración de Hopf $\pi : S^3 \to S^2$ dada por $f(z_1, z_2) = z_2/z_1$. Probar que π es diferenciable y calcular la diferencial en los puntos $(1,0)$, $(\imath, 0)$, $(0,1)$ y $(0,\imath)$.

11. Considerar en la esfera S^n la estructura diferenciable usual. Sea $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión y sea $p = (p_1, \ldots, p_{n+1}) \in S^n$ con $p_{n+1} > 0$.
   (a) Considerar en la esfera el sistema coordenado $\left(U_{n+1}^+, \phi_{n+1}^+ = (x_1, \ldots, x_n)\right)$ y en $\mathbb{R}^{n+1}$ el sistema coordenado usual. Hallar la matriz de $(di)_p$ en las bases asociadas a esos sistemas coordenados.
   (b) Mostrar que el espacio tangente a la esfera en p es el ortogonal a p. Más precisamente:

$$(di)_p(T_pS^n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p : \sum_{i=1}^{n+1} a_i p_i = 0,\ a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

   (c) Sea $q \in S^2 \setminus \{n, s\}$ y considere el vector tangente X_q dado en el ejercicio 8. Exprese $(di)_q X_q$ en términos del sistema coordenado usual de $\mathbb{R}^3$ y usando coordenadas esféricas.

12. (a) Dar explícitamente una partición de la unidad subordinada al cubrimiento de S^1
$$\{S^1 - \{(0,1)\}, S^1 - \{(0,-1)\}\}.$$
    (b) Sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de una variedad diferenciable. Mostrar que existe un refinamiento abierto localmente finito $\{V_\alpha\}$ tal que $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$ para todo α.
    [Hint: Usar particiones de la unidad]

13. Probar que la métrica riemanniana g construida en una variedad arbitraria a partir de particiones de la unidad (según lo visto en el teórico) es diferenciable. Es decir, para todo entorno coordenado $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ de M, se cumple que la función de U en $\mathbb{R}$ dada por $p \mapsto g_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right)$ es diferenciable para todo i, j.

14. Mostrar que si $f : M \to N$ es una función diferenciable, entonces $df : TM \to TN$ es diferenciable.

15. (a) Probar que TS^1 es difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.
    (b) Dar estructura de variedad diferenciable al conjunto de rectas orientadas en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Comparar con el respectivo ejercicio del práctico 1.

Ejercicios opcionales

1. Sea $SL(2, \mathbb{R})$ el grupo de las matrices 2×2 con determinante 1. Pruebe que $SL(2, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie. [Hint: Puede usar la descomposición de Iwasawa de $SL(2, \mathbb{R})$: toda matriz g de $SL(2, \mathbb{R})$ tiene una única representación como $g = kan$ donde k, a y n pertenecen respectivamente a cada uno de los siguientes tres grupos
$$SO(2, \mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R}\right\},\ A = \left\{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} : r > 0\right\},\ N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\}$$
¿Son $SO(2, \mathbb{R}), A$ y N grupos de Lie? ¿Es $SL(2, \mathbb{R})$ el producto directo de grupos de $SO(2, \mathbb{R}), A$ y N?

2. Sea G un grupo de Lie y U cualquier abierto de la identidad e de G. Mostrar que existe un abierto V de e tal que $V \subseteq U$ y $gh^{-1} \in U$ para todo $g, h \in V$.
[Hint: Como el producto es una función continua, existen abiertos A y B de la identidad tales que $A.B \subseteq U$. Piense en la intersección de A y B, y en el paso que hace falta para que el producto con inversos no se salgan de U.]

3. Sea G un grupo de Lie conexo y H un subgrupo abierto de G. Probar que $H = G$.
[Hint: ¿Qué tipo de conjunto es una coclase de H?]

4. Sea G un grupo de Lie y sea $U \subseteq G$ cualquier entorno de la identidad. Muestre que todo elemento de G puede ser escrito como un producto finito de elementos de U. En particular, U genera a G. [Hint: Sea $H = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U^n$ ¿Es H un subgrupo abierto de G?]

5. Sean $U_x := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}P^2 : x \neq 0\}$ y $\varphi_x : U_x \subseteq \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[x, y, z] \mapsto (u_1, v_1) = (\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$, y análogamente considere (U_y, φ_y) con $\varphi_y([x, y, z]) = (u_2, v_2) = (\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$. Dado p en U_x, sea $X_p = \frac{y}{x}\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p - \frac{z}{x}\left.\frac{\partial}{\partial v_1}\right|_p$ un vector tangente. Si $q \in U_x \cap U_y$, escribir X_q en las coordenadas dadas por (U_y, φ_y).

6. Probar que toda variedad diferenciable compacta M puede ser embebida en $\mathbb{R}^N$ para algún $N \in \mathbb{N}$.
[Hint: Sea $\{(U_k, \varphi_k : U_k \to V_k \subseteq \mathbb{R}^m)\}_{k=1}^s$ un atlas finito de M y sea $\{\rho_k\}_{k=1}^s$ una partición de la unidad subordinada a tal atlas. Para cada abierto U_i considere la función $h_i : M \to \mathbb{R}^m$ definida como $h_i(x) = \rho_i(x)\varphi_i(x)$ si $x \in U_i$ ó cero en otro caso y pensar en la función $x \mapsto (\rho_1(x), \ldots, \rho_s(x), h_1(x), \ldots, h_s(x))$]

7. (a) Sea M una variedad suave y A un subconjunto cerrado de M. Probar que existe una función suave $f : M \to [0, 1) \subset \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) = A$
    (b) (Lema de Urysohn suave) Sea M una variedad suave y sean A, B dos subconjuntos cerrados y disjuntos de M. Muestre que existe $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $f(x) \in [0, 1]$ para todo $x \in M$ y $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) = B$.
    [Hint: Sea g_A y g_B las funciones obtenidas del ejercicio anterior aplicado a A y B y considere $f := g_A/(g_A + g_B)$].

8. Pruebe que toda variedad suave M admite una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que es *propia*; es decir, tal que la imagen inversa de conjuntos compactos son conjuntos compactos.