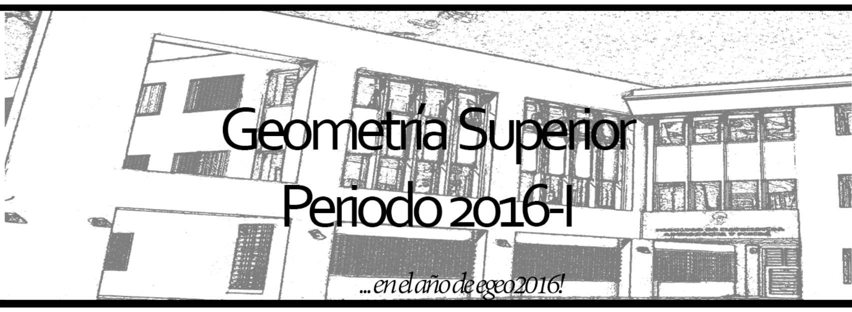


FAMAF

Práctico 3

1 Subvariedades y el Teorema de la Función Inversa

1. Sea $i : S^1 \to \mathbb{R}^2$ la inclusión y sea (U, x) el sistema coordenado dado por la inversa de la función $(\cos t, \sin t)$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Calcular $di_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p\right) \in T_{i(p)}\mathbb{R}^2$ para todo $p \in S^1 - \{(-1, 0)\}$.

2. Sea $\varphi : (-\pi/4, \pi/2) \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$\varphi(t) = \sin(2t)(\cos t, \sin t).$$
Graficar la imagen de φ. Probar que φ es una subvariedad que no es incrustada
[Hint: Recurrir a sucesiones.]

3. Sea $M \subset N$ una subvariedad. Sea $\gamma : (a, b) \to N$ una curva diferenciable tal que $\gamma(a, b) \subset M$. Mostrar que no es necesariamente verdadero que $\gamma'(t) \in di_{\gamma(t)}(T_{\gamma(t)}M)$ para todo $t \in (a, b)$, donde $i : M \to N$ es la inclusión.

4. Sea (M, ψ) una subvariedad de N. Mostrar que si M es compacta, entonces es incrustada.

5. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y sea $p \in M$. Demostrar los siguientes enunciados:
   (a) Supongamos que $y_1, \ldots, y_n$, con $n < m$, es un conjunto de funciones independientes en p (i.e. funciones C^∞ definidas en un entorno abierto de p y tales que sus diferenciales en p son linealmente independientes). Entonces $y_1, \ldots, y_n$ forman parte de un sistema coordenado en un entorno abierto de p.
   (b) Sea $f : M \to N$ una función C^∞ y supongamos que $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es suryectiva. Sea $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistema coordenado en un entorno abierto de $f(p) \in N$. Entonces $x_1 \circ f, \ldots, x_n \circ f$ forman parte de un sistema coordenado en un entorno abierto de p.

6. Una función diferenciable $\pi : M \to N$ se dice una *submersión* si $d\pi_p : T_pM \to T_{\pi(p)}N$ es suryectiva para todo $p \in M$.
   (a) **Forma local de una submersión.** Probar que si $\pi : M^m \to N^n$ es una submersión, entonces dado $p \in M$ existen sistemas coordenados (U, φ) alrededor de p en M y (V, ψ) alrededor de $\pi(p)$ en N tales que
   $$\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$$
   es la proyección sobre las primeras n coordenadas.
   (b) Probar que toda submersión es abierta.

7. (a) Dar una estructura de variedad diferenciable al fibrado cotangente T^*M, de manera similar a lo hecho en el teórico para el fibrado tangente TM.
   (b) Probar que las proyecciones canónicas $\pi : TM \to M$ y $\pi^* : T^*M \to M$ son submersiones con estas estructuras diferenciables.

8. Sean $\pi : M \to N$ una submersión, S una variedad diferenciable y $f : S \to M$ una función diferenciable tal que $\pi \circ f : S \to N$ es un difeomorfismo. Probar que (S, f) es una subvariedad incrustada de M.

9. (a) Pruebe que todo subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ es cíclico y generado por un $a > 0$ o es denso.
   [Hint: Estudiarlo del práctico de estructuras algebraicas].

(b) Sea α un número irracional y considere el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t + n,\ y = \alpha t + m \text{ con } t \in \mathbb{R} \text{ y } m, n \in \mathbb{Z}\}$$

es un subconjunto denso de $\mathbb{R}^2$.

(c) Sean S^1 la circunferencia unitaria en $\mathbb{C}$ y T^2 el toro $S^1 \times S^1$. Se define la función $\varphi : \mathbb{R} \to T^2$ por $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, donde α es un número irracional. Mostrar que $(\mathbb{R}, \varphi)$ es una subvariedad densa de T^2 que no es una incrustación. Verificar que φ es un homomorfismo de grupos.

10. Sean M y N variedades diferenciables y $F : M \to N$ una inmersión. Probar que una métrica riemanniana g en N induce naturalmente una métrica riemanniana F^*g en M, definida por

$$(F^*g)_p(u,v) = g_{F(p)}((dF)_p u, (dF)_p v),$$

para $p \in M$, $u, v \in T_pM$.

11. De la teoría se conoce la siguiente proposición:

Sea (M, ψ) una subvariedad de N. Si M es incrustada y $\psi(M)$ es cerrado en N, entonces para toda $g \in C^\infty(M)$ existe $f \in C^\infty(N)$ tal que $f \circ \psi = g$.

Probar que la proposición no es verdadera si quitamos la hipótesis que ψ es una incrustación o la hipótesis que $\psi(M)$ es cerrado en N.

12. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x,y) = x^2 - y^3$.

(a) ¿ Es $\Phi^{-1}(0)$ una subvariedad incrustada de $\mathbb{R}^2$?

(b) ¿ Puede dar a $\Phi^{-1}(0)$ una topología y una estructura diferenciable tal que es una subvariedad inmersa?

13. Mostrar que la esfera menos los polos y el hiperboloide de revolución de una hoja son subvariedades de $\mathbb{R}^3$. Mostrar que además son difeomorfas.

14. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|^4 - 5\|x\|^2 + 4$. Mostrar que existe $r > 0$ que satisface $df_x = 0$ si y solo si $x = 0$ ó $\|x\| = r$. Mostrar que $f^{-1}(\{4\})$ no es subvariedad pero es unión de dos subvariedades disjuntas, y que $f^{-1}(\{r^4 - 5r^2 + 4\})$ y $f^{-1}(\{4\}) - \{0\}$ son subvariedades incrustadas. ¿En qué casos se puede aplicar el teorema de la función implícita a la función f?

15. (a) Sea $\mathrm{O}(n) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) : AA^t = I\}$ el conjunto de matrices ortogonales $n \times n$. Mostrar que $\mathrm{O}(n)$ es una subvariedad incrustada de $M(n,\mathbb{R})$. ¿Es una subvariedad incrustada de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) := \{A \in M(n,\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$?

(b) Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{O}(3)$ dada por $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es γ diferenciable?

16. (a) Sea $f : N \to Q$ una función diferenciable entre variedades diferenciables y sea $q \in Q$ un valor regular de f en su imagen. Sea M la subvariedad $f^{-1}(\{q\})$. Mostrar que

$$T_pM \simeq di_p(T_pM) = \ker(df_p)$$

para todo $p \in M$ (i denota la inclusión de M en N).

(b) Sea $p \in S^n$. Mostrar que T_pS^n es naturalmente isomorfo al subespacio ortogonal a p, es decir $\{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p \rangle = 0\}$.

17. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable y sea

$$U = \{p \in M : \text{rango } df_p \geq \text{rango } df_q \text{ para todo } q \in M\},$$

es decir, U es el subconjunto de M donde el rango de la diferencial de f alcanza su máximo. Mostrar que U es abierto.
[Hint: El rango no disminuye localmente.]

18. (a) Asociando a cada elemento de $\mathbb{R}P^2$ una proyección ortogonal, o equivalentemente una matriz simétrica 3×3, encontrar una incrustación de $\mathbb{R}P^2$ en $\mathbb{R}^6$.

(b) Encontrar una incrustación de $\mathbb{R}P^2$ en $\mathbb{R}^5$ notando que la imagen de la incrustación de (a) está en un hiperplano de $\mathbb{R}^6$.
[Hint: Considerar un conjunto de nivel de la función traza.]

Ejercicios opcionales

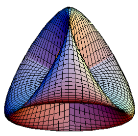
1. Sea (M, φ) una subvariedad incrustada de N tal que $\dim M < \dim N$. Probar que $\varphi(M)$ no es un subconjunto denso de N.

2. Sea $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un polinomio homogéneo de grado m en tres variables y sea $M \subseteq \mathbb{R}P^2$ definido por el conjunto de ceros de p
$$M := \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 : P(x, y, z) = 0\}.$$
   (a) Muestre que M es un conjunto bien definido de $\mathbb{R}P^2$
   (b) Muestre que si el sistema
$$\begin{cases} p(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases}$$
   tiene por solución solo a $(0,0,0)$ entonces M es una subvariedad incrustada de $\mathbb{R}P^2$. ¿Puede dar un ejemplo de un polinomio satisfaciendo estas condiciones?

3. Viendo a S^1 como *el ecuador* de S^2 ¿Se puede ver a $\mathbb{R}P^1$ como una subvariedad incrustada de $\mathbb{R}P^2$? y en caso afirmativo ¿se puede obtener a $\mathbb{R}P^1$ como un conjunto de nivel de un valor regular de una función f en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}P^2)$?

4. (Veronese embedding of $\mathbb{R}P^2$) Muestre que la función $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por
$$[x : y : z] \mapsto (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$
   es una incrustación de $\mathbb{R}P^2$ en $\mathbb{R}^4$.
   Puede ser probado, con herramientas que exceden el contenido del curso, que $\mathbb{R}P^2$ no puede ser embedido en $\mathbb{R}^3$.

5. (Steiner surface o Roman Surface) Mostrar que la función $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$[x : y : z] \mapsto (xy, xy, yz)$$
   es una inmesión (excepto en seis puntos).



6. Probar que no existe una inmersión de $\mathbb{R}P^n$ en $\mathbb{R}^n$.

7. Probar que la imagen inversa de cualquier punto de S^2 bajo la fibración de Hopf $\pi : S^3 \to S^2$ (ver práctico anterior) es una subvariedad incrustada de S^3 naturalmente difeomorfa a S^1.