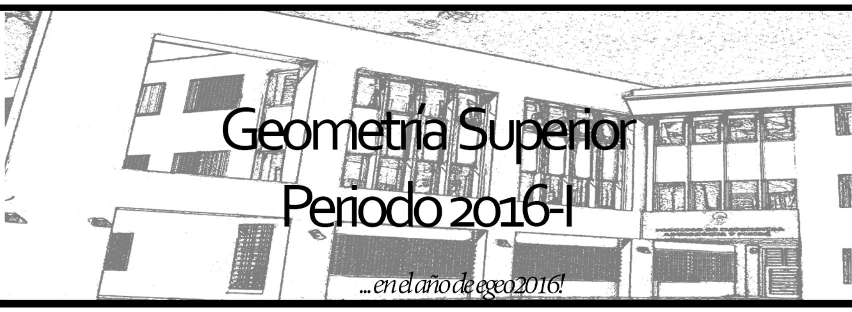

FAMAF

Práctico 4

1 Campos Vectoriales

1. Sea γ una curva integral de un campo vectorial X en una variedad diferenciable M, tal que $\gamma'(t) = 0$ para algún t. Mostrar que γ es constante.

2. Probar que no todo campo en $\mathbb{R}$ es completo. Encontrar el intervalo maximal de definición de una curva integral del campo contraejemplo elegido.

3. En $\mathbb{C} - \{0\}$ definimos el campo $V(z) = 1/\bar{z}$. Dibujarlo y mostrar que no es completo. Hallar $\theta_t(A)$ para $t > 0$, donde A es el anillo $1 < |z| < 2$ y θ_t es el flujo local asociado a V.

4. Probar que todo campo vectorial en una variedad compacta es completo.

5. (a) *Restricción de campos a lo largo de una inmersión.* Sea $\varphi : M \to N$ una inmersión. Sea Y un campo diferenciable en N tal que $Y_{\varphi(p)}$ pertenece a la imagen de $d\varphi_p$ para todo $p \in M$. Para cada $p \in M$, sea X_p el único vector tangente a M en p tal que $d\varphi_p(X_p) = Y_{\varphi(p)}$. Mostrar que X define un campo diferenciable en M.
   [Hint: Recurrir a la forma local de una inmersión.]

   (b) En $\mathbb{R}^{2n}$ definimos el campo

   $$Y(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{n} -y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

   Mostrar que existe un campo X en la esfera S^{2n-1} tal que $(d\iota) \circ X = Y \circ \iota$, donde $\iota : S^{2n-1} \to \mathbb{R}^{2n}$ es la inclusión. Verificar que $t \mapsto \gamma_p(t)$, la curva integral de X que en $t = 0$ pasa por p, describe un círculo máximo para todo $p \in S^{2n-1}$.

6. Sea $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ y sea X el campo vectorial definido por $X(z) = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_z$. Mostrar que no existe un intervalo de tiempo uniforme alrededor de cero donde están definidas todas las curvas integrales de X.

7. Encontrar para cada uno de los siguientes campos en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ sus curvas integrales y determinar si son completos o no:
   (a) $X = \mathrm{e}^{-x} \frac{\partial}{\partial x}$, (b) $Y = x \frac{\partial}{\partial x}$, (c) $Z = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$.

8. Para cada $t \in R$, considere la transformación $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

   $$(x, y) \mapsto \varphi_t(x, y) = (x \cos(t) + y \sin(t), -x \sin(t) + y \cos(t)).$$

   (a) Probar que φ_t es un grupo monoparamétrico de transformaciones de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calcular el campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ asociado a φ_t (el generador infinitesimal).
   (c) Describir las curvas integrales de X.

9. Sean M una variedad diferenciable, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, y $f, g : M \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables.
   (a) Probar que $[X, Y]_p \in T_pM$ para todo p en M. Concluir que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.
   (b) Probar que $[X, gY] = g[X, Y] + X(g)Y$. Deducir una fórmula para $[fX, gY]$.
   (c) Si $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema coordenado, mostrar que $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ para todos i, j.

(d) En $\mathbb{R}^2$ definimos los campos V y W por $V \equiv e_1$, $W(x, y) = e^x e_2$. Mostrar que no existe un sistema coordenado $\psi = (u, v)$ tal que $\frac{\partial}{\partial u} = V$ y $\frac{\partial}{\partial v} = W$.

10. Encontrar la expresión general para $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, X\right] = X \text{ y } \left[\frac{\partial}{\partial y}, X\right] = X.$$

11. Sean M una variedad diferenciable, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $p \in M$. Probar que

$$t \mapsto (d\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y_{\theta_t(p)})$$

define una curva C^∞ en T_pM, en donde θ_t es el flujo local asociado a X. (Recordar de la teoría que derivando esta curva en $t = 0$, obtenemos el corchete $[X, Y]_p$, con las identificaciones usuales.)

12. **El álgebra de Lie de un grupo de Lie.** Un campo X (que no asumimos diferenciable) en un grupo de Lie G se dice *invariante a izquierda* si X está L_g-relacionado consigo mismo para todo $g \in G$ (en otras palabras, si $dL_g(X_h) = X_{gh}$ para todos $h, g \in G$)

    (a) Probar que todo campo invariante a izquierda en G es diferenciable.

    (b) Probar que el corchete de dos campos invariantes a izquierda es invariante a izquierda. Deducir que el conjunto $\mathfrak{g}$ de todos los campos invariantes a izquierda en G forma un álgebra de Lie con el corchete inducido de $\mathfrak{X}(G)$, $\mathfrak{g}$ se conoce como el *álgebra de Lie* de G.

    (c) Probar que $\mathfrak{g}$ es isomorfo (como espacio vectorial) a T_eG. Por lo tanto, $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

13. Sea

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

    (a) Mostrar que H admite una estructura de variedad diferenciable con la cual H es difeomorfa a $\mathbb{R}^3$.

    (b) Mostrar que H dotado con la multiplicación de matrices es un grupo de Lie llamado el *grupo de Heisenberg*.

    (c) Mostrar que $B = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\}$. es una base de la álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H.

2 Ejercicios Opcionales

1. Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se define un campo vectorial Y en N de la siguiente manera: $Y_q = (df)_{f^{-1}(q)}(X_{f^{-1}(q)})$, y se lo denota $Y = df \cdot X$. Probar que:

    (a) $df \cdot X \in \mathfrak{X}(N)$.

    (b) Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $df \cdot [X, Y] = [df \cdot X, df \cdot Y]$.

    (c) Si X tiene como grupo monoparamétrico (local) a Φ_t, entonces $df \cdot X$ tiene como grupo monoparamétrico (local) a $f \circ \Phi_t \circ f^{-1}$.

2. Si $f : M \to M$ es un difeomorfismo y $X \in \mathfrak{X}(M)$, se dice que X es *invariante por* f si $(df) \cdot X = X$. Probar que $\forall t \in \mathbb{R}$ X es Φ_t-invariante (X completo).