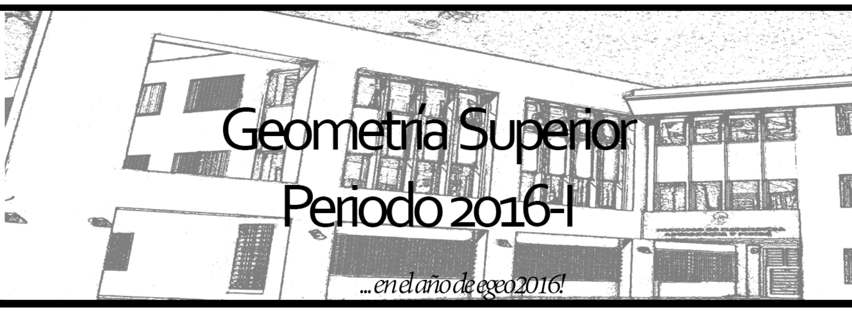

FAMAF

Práctico 5

1 Álgebra multilineal alternante

En lo que sigue, $\{e^i \mid i = 1, \dots, n\}$ denota la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Mostrar que si $k > n$, entonces $\Lambda^k(V^*) = \{0\}$.
   [Hint: Todo subconjunto de V con más de n elementos es linealmente dependiente.]

2. (a) Simplificar las siguientes expresiones.

   $$(e^2 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^1) \wedge (5e^1 - e^2), \qquad e^1 \wedge e^5 \wedge e^4 \wedge (e^1 \wedge e^4 + e^4 \wedge e^2).$$

   (b) Mostrar que si $a, b, c \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$, entonces $a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a = (a - b) \wedge (b - c)$.

   (c) Sea $f \in \Lambda^k(V^*)$. Mostrar que si k es par, entonces f conmuta con todos los elementos de $\Lambda^k(V^*)$.

3. (a) Mostrar que el subconjunto $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ de V^* es linealmente independiente si y solo si $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_m \neq 0$.

   (b) Mostrar que $2e^1 + 3e^2 - e^3$, $e^1 + 2e^2$, $e^1 - 2e^3$ son linealmente dependientes.

   (c) Probar que dos conjuntos linealmente independientes $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$ y $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ son bases del mismo subespacio r-dimensional de V^* si y sólo si

   $$\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_r = c\, \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r,$$

   para algún $c \neq 0$; y en tal caso $c = \det B$, donde $\theta_i = \sum_j B_{ij} \xi_j$.

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Un elemento α de $\Lambda^k(V^*)$ se dice *descomponible* si existen $\theta_1, \dots, \theta_k \in V^*$ tales que $\alpha = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k$.

   (a) Mostrar que $\alpha \wedge \alpha = 0$ si α es descomponible.

   (b) Mostrar que $e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ no es descomponible ($V = \mathbb{R}^4$).

   (c) Sea ω una función n-lineal alternante no nula en V y sea

   $$F : V \to \Lambda^{n-1}(V^*), \qquad F(v)\,(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega\,(v, v_1, \dots, v_{n-1})\,.$$

   Probar que F es un isomorfismo de espacios vectoriales.

   (d) Mostrar que si $k = 1$, $n - 1$ o n, entonces toda $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ es descomponible.

5. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, donde V y W son espacios vectoriales reales de dimensión finita. Se define $T^* : \Lambda^k(W) \to \Lambda^k(V)$ mediante

   $$(T^*\sigma)(v_1, \dots, v_k) = \sigma(Tv_1, \dots, Tv_k), \quad \sigma \in \Lambda^k(W), \quad v_1, \dots, v_k \in V.$$

   Probar que T^* es lineal y que $T^*(\sigma \wedge \tau) = T^*\sigma \wedge T^*\tau$.

2 Formas Diferenciales

1. Sea M una variedad diferenciable y ω una k-forma en M. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes, y en tal caso la k-forma ω se dice diferenciable:

   (a) Para $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrarios, se tiene que $\omega(X_1, \dots, X_k) \in \mathcal{C}^\infty(M)$, donde $\omega(X_1, \dots, X_k)$ es la función dada por
   $$\omega(X_1, \dots, X_k)(p) = \omega_p(X_1|_p, \dots, X_k|_p), \quad p \in M.$$

   (b) Para todo entorno coordenado $(U, (x_1, \dots, x_n))$ de M, se tiene
   $$\omega|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \qquad \text{con } a_{i_1 \cdots i_k} \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

2. Probar que si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$, entonces $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(M)$.

3. (a) Encontrar la diferencial exterior de $\cos(xy^2)\, dx \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ y de $x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$.

   (b) Encontrar una $(n-1)$-forma ξ tal que $d\xi = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$.

4. Sea $\omega \in \Omega^1(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Probar que
   $$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$
   [Hint: Verificar que basta probarlo para 1-formas $\omega = f\, dg$, con $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.]

5. Sea $F : M \to N$ una función suave y sea $\theta \in \Omega^k(N)$. Mostrar que $F^*\theta \in \Omega^k(M)$ y que $d(F^*\theta) = F^*(d\theta)$.

6. Una forma diferencial α de grado k se dice cerrada si $d\alpha = 0$. La forma α se dice exacta si existe una forma β tal que $d\beta = \alpha$.

   (a) Mostrar que toda forma exacta es cerrada y que toda n-forma en una variedad de dimensión n es cerrada.

   (b) Mostrar que el producto exterior de dos formas cerradas es una forma cerrada y que el producto exterior de una forma cerrada con una exacta es una forma exacta.

   (c) Mostrar que la 1-forma $\theta = x\, dy$ en $\mathbb{R}^2$ no es exacta. Más aún, en ningún abierto U está definida una función f tal que $df = \theta$ en U.

7. Considerar en la circunferencia S^1 los sistemas coordenados canónicos $s = \varphi^{-1}$ y $t = \psi^{-1}$ con imágenes los intervalos $(0, 2\pi)$ y $(-\pi, \pi)$, respectivamente. Mostrar que ds, dt definen (bien) una 1-forma suave θ en S^1. Probar que θ es localmente exacta (es decir, para todo $u \in S^1$ existe una función $f : U \to \mathbb{R}$ con $df = \theta|_U$, definida en cierto entorno abierto de U de u), pero no exacta (no existe f así definida en todo S^1).

8. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^3$. Para un campo suave $u = (a, b, c)$ en U se definen
   $$\operatorname{div}(u) = \tfrac{\partial a}{\partial x} + \tfrac{\partial b}{\partial y} + \tfrac{\partial c}{\partial z} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{rot}(u) = \left(\tfrac{\partial c}{\partial y} - \tfrac{\partial b}{\partial z}, \tfrac{\partial a}{\partial z} - \tfrac{\partial c}{\partial x}, \tfrac{\partial b}{\partial x} - \tfrac{\partial a}{\partial y}\right).$$
   Considerar el diagrama
   $$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(U) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow F_1 & & \downarrow F_2 & & \downarrow F_3 \\ \Omega^0(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(U), \end{array}$$
   donde
   $$F_1(u) = a\ dx + b\ dy + c\ dz,$$
   $$F_2(u) = a\ dy \wedge dz + b\ dz \wedge dx + c\ dx \wedge dy,$$
   $$F_3(f) = f\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

   (a) Para cada $j = 1, 2, 3$, mostrar que F_j es un isomorfismo de $C^\infty(U)$-módulos.

   (b) Probar que el diagrama es conmutativo y deducir que $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$ y $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$.

   (c) Decidir si el campo vectorial $u(x, y, z) = (x, 0, 0)$ puede ser el rotor de algún campo vectorial en $\mathbb{R}^3$.

9. Sea u un campo suave en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y sea φ el flujo de u. Dado $p \in U$, probar que la divergencia de u en p es la tasa de variación del volumen de φ. Más precisamente,
$$\operatorname{div}_p(u) = \tfrac{d}{dt}\Big|_0 \det\left(d\varphi_t\right)_p.$$

10. Una variedad simpléctica es un par (M,ω) con M una variedad suave y $\omega \in \Omega^2(M)$ no degenerada y cerrada. Probar que las siguientes son variedades simplécticas:
   (a) Sea $M := \mathbb{C}^n$ con la estructura de variedad suave dada por
   $$(x_1 + \sqrt{-1}y_1, \ldots, x_n + \sqrt{-1}y_n) \mapsto (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$$
   y sea
   $$\omega^{\mathrm{can}} := \sum_{i=1}^{n} x_i \wedge y_i.$$
   Entonces $(M, \omega^{\mathrm{can}})$ es una variedad simpléctica.
   (b) Sea $M := S^2$ la esfera de dimensión 2, entonces (M,ω) es una variedad simpléctica con $\omega_p(u,v) := \langle p, u \times v\rangle$ donde hemos identificado a T_pS^2 con el plano ortogonal a p, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$ y $\times$ es el producto vectorial de $\mathbb{R}^3$. ¿Puede escribir ω en términos de coordenadas cilíndricas? Se puede probar, con herramientas que exceden el contenido del curso, que S^2 es la única esfera que admite una estructura simpléctica.

Ejercicios opcionales

1. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz antisimétrica de tamaño 4×4 y considerar
$$\alpha = \sum_{i<j} a_{ij} e^i \wedge e^j$$
Probar que $\alpha \wedge \alpha = 0$ si y solo si $\det(A) = 0$

2. (a) Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial real de dimensión n con producto interno. Demostrar que existe un producto interno en V^*, que denotaremos por $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$, tal que
   $$\langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle = \langle v, w \rangle$$
   donde v y w son los únicos vectores de V tales que $\alpha = \langle v, \cdot \rangle$ y $\beta = \langle w, \cdot \rangle$.
   (b) Probar que el anterior producto interno induce un producto interno en $\Lambda^k(V^*)$, que denotamos también por $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$, tal que
   $$\langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle = \det(\langle\!\langle \theta_i, \eta_j \rangle\!\rangle)$$
   donde α y β son descomponibles con $\alpha = \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_k$ y $\beta = \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k$.
   (c) Sea $\{f_1, \ldots, f_n\}$ una base ortonormal de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Mostrar que $\{f^{i_1} \wedge \ldots \wedge f^{i_k} : i_1 < \ldots < i_k\}$ es una base ortonormal de $(\Lambda^k(V^*), \langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle)$ con $f^{i_j} := \langle f_{i_j}, \cdot \rangle$.
   (d) Un elemento $vol \in \Lambda^n(V^*)$ se dice que es un elemento de *volumen* si $\|vol\| = 1$. Se define implicitamente el *operador estrella de Hodge* $* : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{n-k}(V^*)$ como: Dado $\beta \in \Lambda^k(V^*)$, $*\beta$ es el único elemento en $\Lambda^{n-k}(V^*)$ tal que
   $$\alpha \wedge (*\beta) = \langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle vol$$
   para todo $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$. Probar que
      i. Para todo $\alpha, \beta \in \Lambda^k(V^*)$, $\alpha \wedge (*\beta) = \beta \wedge (*\alpha)$.
      ii. Si $\{f_1, \ldots, f_n\}$ una base ortonormal de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $vol = f^1 \wedge \ldots \wedge f^n$, entonces $*(f^1 \wedge \ldots \wedge f^k) = f^{k+1} \wedge \ldots \wedge f^n$.
      iii. Probar que $* \circ * = (-1)^{k(n-k)}\,\mathrm{id}$ con id la identidad de $\Lambda^k(V^*)$.

3. Un par (V,ω) se dice espacio vectorial simpléctico si V es un espacio vectorial real con $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ una forma bilineal antisimétrica no degenerada; la cual es llamada una *forma simpléctica* sobre V. Pruebe que la existencia de una tal ω implica que la dimensión de V debe ser par, y recíprocamente, pruebe que todo espacio vectorial de dimensión par admite una forma simpléctica.

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión par $2n$. Pruebe que una $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ es no degenerada si y solo si $\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n \text{ veces}}$ es no nulo.

5. Probar que las siguientes son variedades simplécticas:

   (a) Sea $M := \mathbb{C}P^n$ el espacio proyectivo complejo: $\mathbb{C}P^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ donde $x \sim y$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x = \lambda y$. Consideremos $\pi : S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$ la proyección canónica y definamos la 2-forma ω en $\mathbb{C}P^n$ como
   $$\omega_{[q]}(v, w) = \omega_q^{\text{can}}(\widetilde{v}, \widetilde{w})$$
   donde q es tal que $\pi(q) = [q]$ y $\widetilde{v}, \widetilde{w}$ son vectores tangentes en $T_q S^{2n+1}$ tales que $d\pi_q \widetilde{v} = v$ y $d\pi_q \widetilde{w} = w$. Probar la buena definición de ω y mostrar que $(\mathbb{C}P^n, \omega)$ es una variedad simpléctica. La 2-forma ω es llamada *forma de Fubini-Study.*

   (b) Sean M una variedad suave y T^*M su fibrado cotangente y considere τ la 1-*forma tautológica* de T^*M: Si $v \in T_{q,\varphi}(T^*M)$ entonces
   $$\tau_{q,\varphi}(v) = \varphi((d\pi)_{q,\varphi}(v)).$$
   donde π es la proyección canónica de T^*M a M. Entonces (T^*M, ω) es una variedad simpléctica con $\omega := -\,\mathrm{d}\,\tau$.

6. Probar que el plano proyectivo real no admite una forma simpléctica (más adelante probaremos lo mismo para $\mathbb{R}P^{2n}$).
   [Hint: Razonar por el absurdo: Sea $\widehat{\omega}$ una forma simpléctica sobre $\mathbb{R}P^2$ y compare $\pi^*\widehat{\omega}$ con la forma simpléctica de la 2-esfera en ejercicio anterior, la cual satisface $A^*\omega = -\omega$; aquí π es la proyección de S^2 en $\mathbb{R}P^2$ y A es la transformación antipodal].

7. Aspecto dinámico de las funciones analíticas.

   (a) Sea $(u(x, y), v(x, y))$ un campo en el plano. El campo (u, v) se dice *incompresible* (respectivamente *irrotacional*) si su divergencia $u_x + v_y$ (respectivamente su rotor $v_x - u_y$) se anula idénticamente. Mostrar que la función $f = u - iv$ es analítica si y sólo si el campo (u, v) es irrotacional e incompresible.

   (b) Sea $V(x, y) = (u(x, y), v(x, u))$ un campo en una región D del plano, y sea $C(t) = (x(t), y(t))$ un contorno simple cerrado en D definido en el intervalo $[a, b]$ y recorrido en sentido antihorario. Se definen la *circulación y el flujo de V a lo largo de C* mediante
   $$\text{Circ}\,(V, C) = \int_a^b \langle V(t), C'(t) \rangle \, dt \qquad \text{Flujo}\,(V, C) = \int_a^b \det\,(V(t), C'(t))\, dt.$$
   Si $f = u - iv$, mostrar que
   $$\int_C f(z)\, dz = \text{Circ}\,(V, C) + i\,\text{Flujo}\,(V, C).$$