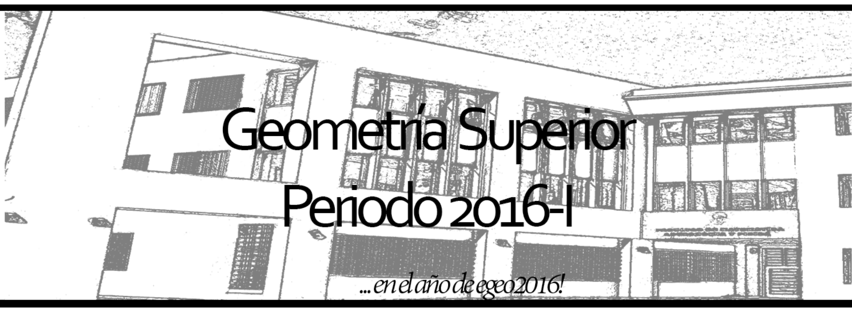

FAMAF

Práctico 6

Distribuciones

1. Probar que toda distribución de dimensión 1 en una variedad diferenciable M es involutiva.
2. Considere en el octante de $\mathbb{R}^3$ de coordenadas positivas los campos

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}, \; Y = xy\frac{\partial}{\partial y} - xz\frac{\partial}{\partial z}.$$

   (a) Probar que ellos generan una distribución involutiva
   (b) Encontrar las superficies integrales.

3. Las posiciones de un uniciclo ideal pueden describirse con coordenadas $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^3$, donde (x, y) es la proyección al piso del centro de la rueda y θ es el ángulo que forma la rueda con el eje equis, según indica la Figura 1 (el uniciclo visto de arriba). En realidad estamos considerando el llamado cubrimiento universal del espacio de posiciones del uniciclo (que permite el seguimiento de la cantidad de vueltas acumuladas).

   (a) Convencerse de que un movimiento ideal $\gamma(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$ es admisible si y solo si $(x', y') = \lambda(\cos\theta, \sin\theta)$ para cierta función $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (b) Mostrar que un movimiento γ es admisible si y solo si $\gamma'(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$ para todo t, donde $\mathcal{D}$ es la distribución de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{D}_{(x,y,\theta)} = \mathrm{span}\{(\cos\theta, \sin\theta, 0), (0, 0, 1)\}$$

   (c) Representar gráficamente la distribución $\mathcal{D}$ y verificar que no es integrable.
   (d) Encontrar una curva admisible a trozos que una los puntos $(0, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

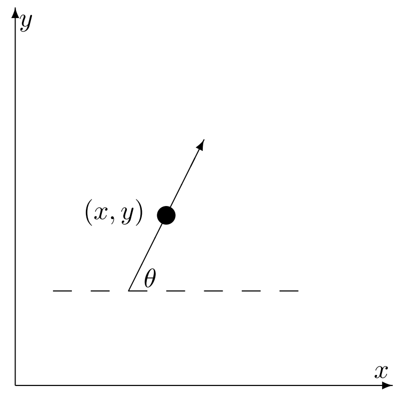

Figure 1: El uniciclo visto de arriba.

4. Hallar la subvariedad integral conexa maximal que contiene a $(0, 0)$ para la distribución $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $\mathcal{D} = \mathbb{R}e_1$.
5. ¿Es la subvariedad de $\mathbb{R}^2$ que conocemos por "el ocho" una subvariedad integral para alguna distribución involutiva sobre $\mathbb{R}^2$?

6. (a) Probar que la recta densa en el toro $\varphi : \mathbb{R} \to T^2$ es una subvariedad integral de alguna distribución en T^2.

   (b) Sea M una variedad diferenciable y sea $f : M \to T^2$ una función diferenciable tal que $f(M) \subset \varphi(\mathbb{R})$. Mostrar que $\varphi^{-1} \circ f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

7. Sea (M, φ) una subvariedad integral conexa de una distribución involutiva en una variedad N. Probar que si $\varphi(M)$ es cerrada en N, entonces M es conexa maximal.

8. Sea $f : M \to N$ una submersión. Probar que existe una distribución involutiva sobre M de dimensión $m-n$ tal que sus variedades integrales conexas maximales son las componentes conexas de $f^{-1}(q)$, $q \in M$.

9. Sea X un campo nunca nulo en una variedad M, sea γ la curva integral de X tal que $\gamma(0) = p \in M$, y sea $\mathcal{D}$ la distribución en M definida por $\mathcal{D}(q) = \mathbb{R}X(q)$. Probar que si existe $t_0 > 0$ tal que $\gamma(t_0) = p$, entonces existe $F : S^1 \to M$ tal que (S^1, F) es una subvariedad integral conexa maximal para $\mathcal{D}$ que contiene a p.

10. (a) Sea $f : M \to N$ una función C^∞. Si df tiene rango constante entonces $\ker(df)$ es una distribución en M (la que en cada punto $p \in M$ es $\ker(d_p f)$).

    (b) *La distribución vertical en el fibrado tangente.* Sea M una variedad diferenciable y sea $\pi : TM \to M$ la proyección canónica. Probar que $\mathcal{D}_v = \ker d\pi_v$ define una distribución (diferenciable) involutiva en TM, conocida como la *distribución vertical*. ¿Cuáles son las subvariedades integrales conexas maximales de $\mathcal{D}$?

Ejercicios Opcionales

11. Considerar el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z\cos(y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -z\log(z)\tan(y).$$

Utilizar el Teorema de Frobenius para probar que dicho sistema tiene una solución $z(x, y)$ en un entorno de $(0, 0)$, con condición inicial $z(0, 0) = 1$.
Hint: considerar en $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ la distribución generada por los campos

$$X(x, y, z) = e_1 + z\cos(y)e_3, \qquad Y(x, y, z) = e_2 - z\log(z)\tan(y)e_3.$$

1. Considere sobre $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, t)\}$ las 1-formas $\alpha = dx + zdt$ y $\beta = dz + dt$ y sea $\mathfrak{I}$ el ideal generado por α y β, y sea $\mathcal{D}$ la distribución asociada a $\mathcal{D}$.

   (a) Compute una base para $\mathcal{D}$.

   (b) ¿Es $\mathcal{D}$ involutiva?

   (c) Si $\omega = dx \wedge dz + dx \wedge dt + dz \wedge dt$ ¿pertenece ω a $\mathfrak{I}$?

   (d) ¿ Es y =constante, z =constante una variedad integral de $\mathcal{D}$?