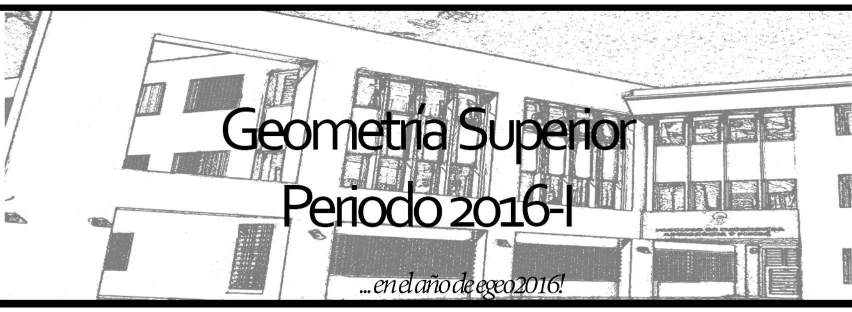

FAMAF

Práctico 7

Orientación

1. Sea M una subvariedad de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Probar que M es orientable si y sólo si M admite un campo normal diferenciable nunca nulo, es decir, una función diferenciable $\xi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\xi_x \perp T_xM$ para todo $x \in M$.

2. Recordar que se dice que un difeomorfismo local entre variedades orientadas M y N, $F : M \to N$, *preserva la orientación* si para cada $p \in M$, el isomorfismo $(dF)_p$ lleva bases positivas de T_pM en bases positivas de $T_{F(p)}N$, y se dice que *invierte la orientación* si para cada $p \in M$, dF_p lleva bases positivas de T_pM en bases negativas de $T_{F(p)}N$. Mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

   (a) F preserva la orientación

   (b) Con respecto a cualquier par de cartas orientadas de M y N, la matrix Jacobiana de F tiene determinante positivo.

   (c) Para cualquier forma de orientación de N que este orientada positivamente, su pullback es una forma orientada positivamente sobre M.

3. Probar que todo difeomorfismo de $\mathbb{R}$ que invierte la orientación tiene un punto fijo.
   [Hint: Teorema del valor medio]

4. Mostrar que el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ es orientable si y sólo si n es impar.

5. (a) Sea M una variedad cubierta por dos sistemas coordenados (U, φ) y (V, ψ) conexos, tales que $U \cap V$ tiene exactamente dos componentes conexas, con la propiedad que el determinante de cambio de coordenadas es positivo en una componente conexa y negativo en la otra. Probar que M no es orientable. ¿Qué puede decir si la intersección es un conjunto conexo?

   (b) Mostrar que la cinta de Moebius M no es orientable, donde $M = (\mathbb{R} \times (-1, 1)) /\!\sim$, con $(s, t) \sim (s + m, (-1)^m\, t)$ para $m \in \mathbb{Z}$.

6. Sea U un abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea 0 un valor regular de la función suave $f : U \to \mathbb{R}$. Probar que la subvariedad $f^{-1}(\{0\})$ es orientable.

7. Los movimientos rígidos de $\mathbb{R}^n$ son de la forma $T \circ O$, donde O es una rotación (transformación ortogonal de determinante 1) y T es una traslación. Mostrar que la forma de volumen $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ de $\mathbb{R}^n$ es invariante por movimientos rígidos, es decir, $f^*\omega = \omega$ para todo movimiento rígido f.

8. Sean M y N variedades orientadas y sea $F : M \to N$ un difeomorfismo que preserva orientación. Si (V, φ) es un entorno coordenado positivo en N, probar que $(F^{-1}U, \varphi \circ F)$ es un entorno coordenado positivo en M.

9. Sea M una variedad orientada de dimensión n, y sea $\int_M : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$ la integral sobre M. Probar:

   (a) $\int_M$ es $\mathbb{R}$-lineal;

   (b) Si $\overline{M}$ denota a M con la orientación opuesta, entonces $\int_{\overline{M}} \omega = -\int_M \omega$ para toda $\omega \in \Omega_c^n(M)$;

   (c) Si ω es una forma de volumen en M, entonces $\int_M \omega > 0$;

   (d) Si $F : N \to M$ es un difeomorfismo que preserva orientación, entonces $\int_M \omega = \int_N F^*\omega$ para toda $\omega \in \Omega_c^n(M)$.

10. (a) Para $i = 1, 2$ sea ω_i una n-forma nunca nula en una variedad M_i de dimensión n. Sea $F : M_1 \to M_2$ un difeomorfismo. Mostrar que si $F^*\omega_2 = \omega_1$, entonces $m_1(A) = m_2(F(A))$ para todo abierto A de M_1, donde m_i es la medida en M_i asociada a ω_i.

    (b) Mostrar que las áreas de las regiones del cilindro y de la esfera inscrita comprendidas entre dos planos paralelos al ecuador coinciden.
    [Hint: Ver que la proyección que mantiene constante la tercera coordenada preserva la forma de volumen]

Ejercicios opcionales

1. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Probar que M es orientable.
   [Hint: Ver ejercicio 4 de los adicionales en práctico 5]

2. Mostrar que si M es la cinta de Moebius o el proyectivo $\mathbb{R}P^2$, entonces M admite un cubrimiento duplo orientado, es decir una variedad diferenciable $\tilde{M}$ junto con una función diferenciable $\pi : \tilde{M} \to M$ que satisface:

   (a) $\tilde{M}$ es orientable, conexa y $\pi^{-1}\{p\}$ consiste exactamente de dos puntos para todo $p \in M$;

   (b) Para cada punto $p \in M$ existe un entorno abierto conexo U de p tal que $\pi^{-1}(U)$ consiste de dos componentes conexas U_1 y U_2 tales que $\pi|_{U_i}$ es un difeomorfismo sobre U para $i = 1, 2$.

3. Sea $\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$ el 2-toro visto como el subconjunto de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{T}^2 := \{(w, x, y, z) : w^2 + x^2 = y^2 + z^2 = 1\}$$

   y provisto de la orientación producto determinada por la orientación usal de S^1. Calcular $\int_{\mathbb{T}^2} \omega$ donde ω es la siguiente 2-forma de $\mathbb{R}^4$; $\omega := xyz\, dw \wedge dy$.