Práctico 3

1. Calcular los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-2n}{3n-7}$. (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+7n}{n-2}$. (c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. (e) $\lim\limits_{n\to\infty} (n-\sqrt{n^2-4n})$. (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n} - \dfrac{n^3}{(n-1)^2}$.

2. Calcular usando la definición los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$. (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}\right)$. (c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)$.

3. (a) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tal que $a_n \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $\{a_n\}$ converge y $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $a_n = l$.

(b) Sea la sucesión $\{a_n\}$ dada por $a_n = (-1)^n$.

(i) Dar tres subsucesiones convergentes de $\{a_n\}$ distintas.

(ii) Probar que si $\{a_{n_j}\}$ es una subsucesión, entonces $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = 1$ ó -1.

(c) Determinar todas las subsucesiones convergentes de la sucesión

$$1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

y hallar el límite en cada caso.

4. (a) Demostrar que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces también converge la sucesión de Cauchy original.

(b) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es convergente.

5. Para probar el siguiente ejercicio usaremos resultados que se deducen usando el Binomio de Newton (se probará en Álgebra I)

i) $(1+h)^n \geq 1 + nh \quad$ para $h > 0$.

ii) $(1+h)^n \geq 1 + nh + \dfrac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \dfrac{n(n-1)}{2}h^2 \quad$ para $h > 0$.

(a) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$, si $a > 1$. (Poner $a = 1+h$, donde $h > 0$.)

(b) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, si $a < 1$.

(c) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, si $a > 1$.(Poner $\sqrt[n]{a} = 1+h$ y estimar h).

(d) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, si $0 < a < 1$. item Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. (Usar ii))

6. (a) Probar que para todo número real $l \in (0,1)$, existe una sucesión $\{q_n\}$ de números racionales tal que $q_n \in (0,1)$ y $\lim_{n\to\infty} q_n = l$.

(b) Considérese la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$$

¿Para qué números l existe una subsucesión que converge hacia l?

7. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y sea $\quad y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$.

(a) Demostrar que la sucesión $\{y_n\}$ converge.

(b) Hallar $\lim_{n\to\infty} y_n$ para:

(i) $x_n = (-1)^n$. (ii) $x_n = \dfrac{1}{n}$. (iii) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

Ahora definimos $z_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$. Notar que $z_n \leq y_n$.

(c) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe si y sólo si $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n$, y en este caso $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n$