Práctico 4

1. (a) Trace el gráfico de la siguiente función.

$$g(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < -1, \\ x+2 & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ 4 & \text{si } x = 1, \\ 4-x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(b) Con el gráfico de la parte (a), determine el valor de los siguientes límites cuando existan.

(i) $\lim_{x\to -1^-} g(x)$. (ii) $\lim_{x\to -1^+} g(x)$. (iii) $\lim_{x\to -1} g(x)$. (iv) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$.
(v) $\lim_{x\to 1^+} g(x)$. (vi) $\lim_{x\to 1} g(x)$. (vii) $\lim_{x\to -\infty} g(x)$. (viii) $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.

2. Calcule cada uno de los siguientes límites en caso de existir. Justifique cada paso para los items (a), (b) y (h).

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$. (b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$. (c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

(d) $\lim_{x\to y} \dfrac{x^n-y^n}{x-y}$. (e) $\lim_{h\to 0} \left(\dfrac{1}{h\sqrt{1+h}} - \dfrac{1}{h} \right)$. (f) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$ $(a>0)$.

(g) $\lim_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$. (h) $\lim_{y\to\infty} \dfrac{6y-4}{3y+1}$. (i) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{5x^3-2x+7}{4x^2-1}$.

3. Sean f y g funciones tales que existe $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y existe $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$. Probar usando el argumento ϵ- δ que

(a) Existe el $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = L_1 + L_2$
(b) Existe el $\lim_{x\to a} (f(x).g(x)) = L_1 L_2$
(c) Existe el $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, si $L_2 \neq 0$.

4. En cada uno de los siguientes casos, encontrar δ tal que, $|f(x)-l| < \varepsilon$ para todo x que satisface $0 < |x-a| < \delta$.

(a) $\begin{cases} f(x) = x^4, \\ l = a^4. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}, \\ a=1,\ l=1. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} f(x) = x^4 + \frac{1}{x}, \\ a=1,\ l=2. \end{cases}$

5. Demuestre por definición los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a>0$. (b) $\lim_{x\to 9^-} \sqrt[4]{9-x} = 0$. (c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty$.

(d) $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. (e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{3x-2} = \dfrac{1}{3}$. (f) $\lim_{x\to -\infty} (-x^3+10) = \infty$.

6. Demuestre los siguientes hechos.

(a) Si $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.
(b) Si $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, no necesariamente se cumple $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^2)$.
(c) Si $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(|x|)$.
(d) Si $\lim_{x\to 0^+} f(1/x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.
(e) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x\to\infty} f(1/x) = \infty$.
(f) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ no existe (usar sucesiones).

7. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$ demuestre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

8. Calcular los siguientes límites. Recordar $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen}(3x)}$. (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x}$. (c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos(x)}$. (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$.

9. Diga si es verdadero o falso, y justifique. Asumir que las funciones f y g están definidas en un entorno de a o de 0 según corresponda.

(a) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ existen, entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ existe.

(b) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe, entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ no existe.

(c) Si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} g(x)\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0$.

(d) Si $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ cuando $|x-a| < \frac{\delta}{2}$.

(e) Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \sqrt{\varepsilon}$ cuando $|x-a| < \delta/13$.