Analisis Matemático I
Clase 18/03/11

Vamos a ver que la ecuacion $x^2 = q$ tiene solución para todo $q \geq 0$.

Un muy sencillo lema nos serà necesario y lo establecemos a continuaciòn.

Lema: Si $x > a > 0$ entonces $x^2 > a^2$.

Demostración: Si $x > a > 0$ entonces, aplicando sucesivamente la consistencia del orden respecto del producto por nùmeros positivos resulta que

$$x^2 = x.x > ax > a.a = a^2,$$

con lo cual sigue el enunciado del lema.

Vamos entonces al resultado que nos interesa:

Lema: La ecuacion $x^2 = q$ tiene una única solución positiva para todo $q \geq 0$.

Demostración: Armemos el conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq q\right\}$.

Veamos que

a) el conjunto A no es vacío: Si $q = 0$, entonces $x = 0$ es la unica solucion a la ecuacion $x^2 = 0$. Si $q > 0$, sabemos por teorema visto que podemos encontrar un n natural tal que $1/n < q$. Como se cumple que

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < q$$

entonces $1/n \in A$.

b) El conjunto A està acotado superiormente. Para ver esto notemos que

$$\begin{aligned} \text{si } q &> 1 \text{ entonces } x > q \text{ implica que } x^2 > q^2 > q \\ \text{si } q &\leq 1 \text{ entonces } x > 1 \text{ implica que } x^2 > 1 \geq q. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\max(q, 1)$ (esto es, el numero mas grande entre q y 1) es una cota superior del conjunto A.

c) Juntando a) y b) y usando la propiedad P13 sobre la existencia de supremo resulta que el conjunto A tiene supremo o cota superior mínima. Llamemos b al supremo del conjunto. Sabemos por lo hecho en el apartado a) que b es mayor que 0 si $q > 0$. Sea $q > 0$, vamos a mostrar que $b^2 = q$. Para ver ello vamos a suponer por el absurdo que $b^2 > q$ o $b^2 < q$.

Si $b^2 < q$, veremos que podemos encontrar un natural n tal que $(b+1/n)^2 < q$, lo cual dice que $b+1/n \in A$ y entonces b no puede ser cota superior del conjunto. Entonces supongamos por el absurdo que $q - b^2 > 0$. Ya se ha probado que los numeros naturales no estan acotados superiormente, con lo cual podemos elegir n tal que

$$n > M = \max\left(1, \frac{4b}{q-b^2}, \frac{2}{q-b^2}\right),$$

donde el numero M significa que elegimos el número más grande entre $1, 4b/(q-b^2)$ y $2/(q-b^2)$.Entonces se cumple que

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} < \min\left(1, \frac{q-b^2}{4b}, \frac{q-b^2}{2}\right)$$

con lo cual, al desarrollar el cuadrado de $b + 1/n$ obtenemos

$$(b + 1/n)^2 = b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} < b^2 + \frac{q - b^2}{2} + \frac{q - b^2}{2} = q$$

Si se llega a cumplir que $b^2 > q$, veremos que podemos encontrar un natural n tal que $(b - 1/n)^2 > q$ lo cual dice, por el lema de arriba que $x^2 > q$ para todo $x > b - 1/n$ y eso contradice que b sea cota superior mínima. Sea

$$n > \frac{2b}{b^2 - q}.$$

Entonces

$$\frac{1}{n} < \frac{b^2 - q}{2b}$$

$$(b - 1/n)^2 = b^2 - 2b/n + 1/n^2 > b^2 - \left(b^2 - q\right) = q,$$

y llegamos a una contradicción. En conclusión, $b^2 = q$.

Ahora veamos que $x^2 = q$ admite a lo sumo dos soluciones. Si tenemos dos soluciones x_1 y x_2 resulta que

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_2^2 \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) &= 0 \end{aligned}$$

lo cual dice que $x_1 - x_2 = 0$ o $x_1 + x_2 = 0$, o sea $x_1 = x_2$ o $x_2 = -x_1$. O sea que si tengo una solución, cualquier otra solución sólo puede ser el inverso aditivo de la otra.

En conclusión podemos entonces definir la función ”raiz cuadrada” como la función que asigna a cada numero real no negativo y el unico numero real no negativo x que soluciona la ecuación $x^2 = y$, y se denota $\sqrt{y}$.