Modelo de Examen Final

1. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva plana parametrizada por longitud de arco. Supongamos que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que la función $|\alpha(t)|$ alcanza un máximo en t_0. Probar que la curvatura κ de α satisface
$$\kappa(t_0) \geq 1/|\alpha(t_0)|.$$

2. Sea $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2\}$.

   (a) Dar la base del plano tangente a S en todos sus puntos y demostrar que $F : S \to S$ definida por $F(x, y, z) = (x, -y, z)$ es una isometría de S. Dar un ejemplo de isometría de S en S que fije a lo sumo un punto de S.

   (b) Mostrar que S es orientable y calcular el vector normal N y los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental en todo punto de S.

   (c) Determinar la curvatura Gaussiana en todos los puntos de S, y para $p = (0, 0, 0)$ calcular $dN|_p$ y mostrar que p es umbílico.

   (d) Dar todas las geodésicas que pasan por $p = (0, 0, 0)$ y decidir si hay o no curvas asintóticas por p.

3. Sea S una superficie regular con la propiedad que para todo $x, y \in S$ existe α geodésica en S tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$. Sea $F : S \longrightarrow S$ una isometría tal que $F(p) = p$ y $dF_p = Id$ para algún $p \in S$. Probar que $F(q) = q$ para todo $q \in S$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$
Si $S = \mathrm{Im}(\varphi)$, probar que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S$ es isometría si y sólo si S es un plano paralelo al plano uv.

5. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   (a) Si $F : S_1 \to S_2$ es una isometría local, entonces F lleva líneas de curvatura en líneas de curvatura.

   (b) Sean W_1, W_2 campos vectoriales a lo largo de una curva α. Si W_1 es paralelo, $\langle W_1(t), W_2(t)\rangle =$ cte y $|W_2(t)| =$ cte, entonces W_2 es también paralelo.

   (c) Sea S una superficie regular orientable, $p \in S$. Si existe una base $\{v, w\}$ de $T_p(S)$ tal que $dN_p(v) \times dN_p(w) = 0$, entonces la curvatura gaussiana en p es cero.