GEOMETRÍA DIFERENCIAL - 2012

Práctico 2

1. Sea $\alpha(s) = (a\cos(s/c), a\,\mathrm{sen}(s/c), b\,s/c)$ con $c^2 = a^2 + b^2$ una hélice.
   (a) Mostrar que el parámetro s es la longitud de arco.
   (b) Determinar la curvatura y la torsión de α.
   (c) Determinar el plano osculador de α.
   (d) Dar el triedro de Frenet de esta curva y mostrar que se cumplen las fórmulas estructurales del triedro.
   (e) Mostrar que el ángulo formado por la recta que pasa por $\alpha(s)$ con dirección $\mathbf{n}(s)$ y el eje z es constantemente $\pi/2$.
   (f) Mostrar que las rectas tangentes a α forman un ángulo constante con el eje z.

2. La *catenaria* es la curva plana $\alpha(t) = (t, \cosh t)$. Graficar la catenaria y calcular su curvatura. ¿En qué punto es máxima su curvatura?

3. Sea α una curva regular, no necesariamente parametrizada por longitud de arco. Sea $s(t)$ la longitud de arco desde t_0 y sea $t(s)$ la función inversa de s.
   (a) Probar que
   $$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\alpha'(t)|}, \qquad \frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{|\alpha'(t)|^4}.$$
   (b) Probar que la curvatura de α en el punto $\alpha(t)$ es
   $$\kappa(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}.$$
   (c) Probar que la torsión de α en el punto $\alpha(t)$ es
   $$\tau(t) = -\frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t)\rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$
   (d) Si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, mostrar que
   $$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

4. Encontrar fórmulas para $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$ para una curva α no necesariamente parametrizada por longitud de arco.

5. Sea $\alpha(t) = (\mathrm{sen}\, t\, \mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, t \cos t, \cos t)$, $0 \le t \le \pi$.
   (a) Calcular la longitud de α.
   (b) Determinar la curvatura y la torsión de α.
   (c) Determinar el plano osculador de α.

(d) Dar el triedro de Frenet de esta curva y mostrar que se cumplen las fórmulas estructurales del triedro.

6. Sean $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $\varphi \in [0,2\pi)$ y $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y positiva; mostrar que la curva plana

$$\alpha(s) = \left(\int_0^s \cos\theta(t)\,dt \ + a, \int_0^s \operatorname{sen}\theta(t)\,dt \ + b \right) \qquad \theta(t) = \int_0^t \kappa(u)\,du \ + \varphi$$

es la única curva parametrizada por longitud de arco con curvatura κ, con posición inicial (a,b) y velocidad inicial (unitaria) formando un ángulo φ con el eje x.

7. En general, se dice que una curva α es una *hélice* si las rectas tangentes a ella forman un ángulo constante con una dirección fija. Suponer que $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$ y probar que:

   (a) Mostrar que α es una hélice si y sólo si κ/τ es constante.

   (b) Mostrar que α es una hélice si y sólo si la recta que pasa por $\alpha(s)$ con dirección $\mathbf{n}(s)$ es paralela a un plano fijo.

   (c) Mostrar que α es una hélice si y sólo si la recta que pasa por $\alpha(s)$ con dirección $\mathbf{b}(s)$ forma un ángulo constante con una dirección fija.

8. Sea α la curva plana dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$.

   (a) Mostrar que la longitud de arco es

$$\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\theta.$$

   (b) Mostrar que la curvatura en el punto $\rho = \rho(\theta)$ es

$$\kappa(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

9. Dada la curva $\beta(t) = (t + \sqrt{3}\operatorname{sen} t, 2\cos t, \sqrt{3}\,t - \operatorname{sen} t)$, demostrar que β es una hélice, calculando su curvatura y su torsión. Hallar una hélice α de la forma $(a\cos t, a\operatorname{sen} t, b\,t)$ y una isometría F de $\mathbb{R}^3$ tales que $F(\alpha) = \beta$.

10. Una *rotación* es una transformación ortogonal C tal que $\det C = 1$. Demostrar que C es efectivamente una rotación en torno a una recta que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$, es decir, hallar $\theta \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ tales que $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ de modo que C esté dada por:

$$C(v_1) = \cos\theta\, v_1 + \operatorname{sen}\theta\, v_2, \qquad C(v_2) = -\operatorname{sen}\theta\, v_1 + \cos\theta\, v_2, \qquad C(v_3) = v_3.$$

11. Demostrar las siguientes afirmaciones:

    (a) El conjunto $\mathcal{E}$ de todas las isometrías de $\mathbb{R}^3$ es un grupo si consideramos la composición de funciones como operación.

    (b) El conjunto $\mathcal{T}$ de todas las traslaciones de $\mathbb{R}^3$ y el conjunto $O(3)$ de todas las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ son subgrupos de $\mathcal{E}$. Determinar $\mathcal{T} \cap O(3)$.

    (c) El conjunto $SO(3)$ de todas las rotaciones de $\mathbb{R}^3$ es subgrupo de $O(3)$.

    (d) El conjunto $\mathcal{E}^+$ de todas las isometrías que preservan la orientación en $\mathbb{R}^3$ es subgrupo de $\mathcal{E}$.