GEOMETRÍA DIFERENCIAL - 2012

Práctico 3

1. Decir en cada caso en qué región $D \subset \mathbb{R}^2$ el mapa $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización.
   (a) $\varphi(u, v) = (u, uv, v)$.
   (b) $\varphi(u, v) = (u^2, u^3, v)$.
   (c) $\varphi(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$.
   (d) $\varphi(u, v) = (\cos 2\pi u, \operatorname{sen} 2\pi u, v)$.

2. Mostrar que el conjunto $S = \{(x, y, z) :\ z = x^2 - y^2\}$ es una superficie regular y que los dos mapas que siguen son parametrizaciones de S.
   (a) $\varphi(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$, con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) $\psi(u, v) = (u \cosh v, u \operatorname{senh} v, u^2)$, con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y $u \neq 0$.

   Describir en cada caso qué subconjunto de S es cubierto por la parametrización.

3. Encontrar una parametrización del paraboloide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + x^2 + y^2\}$.

4. Mostrar que el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es una superficie regular y encontrar parametrizaciones cuyos entornos coordenados lo cubran.

5. Mostrar que las coordenadas esféricas constituyen un sistema coordenado de la esfera unitaria S^2 y encontrar sistemas coordenados similares para cubrirla toda. Escribir en coordenadas los paralelos y los meridianos.

6. Decidir (sin demostración rigurosa) cuáles de los siguientes conjuntos son superficies regulares.
   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 1\}$,
   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ y } x^2 + y^2 < 1\}$,
   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
   (d) La superficie cilíndrica S cuya base es una curva plana C con forma de ocho, es decir: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in C\}$.

7. Una manera de definir un sistema de coordenadas en la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ es mediante la proyección estereográfica, que lleva el punto $(x, y, z) \neq (0, 0, 2)$ de la esfera al punto de intersección del plano x-y con la recta que pasa por los puntos (x, y, z) y $(0, 0, 2)$. Llamamos π a esta proyección.

   (a) Mostrar que $\varphi = \pi^{-1}$ está dado por la fórmula

$$\varphi(u, v) = \frac{2}{u^2 + v^2 + 4}(2u, 2v, u^2 + v^2).$$

(b) Mostrar que con esta carta y otra similar se puede cubrir la esfera con dos entornos coordenados.

(c) Escribir en coordenadas los paralelos y los meridianos.

(d) Desarrollar todo lo anterior de manera análoga para la esfera unitaria centrada en el origen.

8. (a) Probar que $S = \{(x, y, z) : (x^2 + y^2)^2 + 3z^2 = 1\}$ es una superficie regular.

   (b) ¿Para qué valores de c es $S = \{(x, y, z) : z(z-2)+xy = c\}$ una superficie regular?

9. Para cada una de las siguientes funciones encontrar sus puntos críticos y determinar para qué valores de c el conjunto $f^{-1}(c)$ es una superficie regular:

   (a) $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$

   (b) $f(x, y, z) = xyz^2$.

10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z^2$. Probar que 0 no es un valor regular de f, pero sin embargo $f^{-1}(0)$ es una superficie regular.

11. Probar que si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un difeomorfismo y S es una superficie regular, entonces $F(S)$ es una superficie regular.

12. El *toro* es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ generado rotando una circunferencia de radio r alrededor de una línea recta, la cual se encuentra en el mismo plano que la circunferencia y a una distancia $a > r$ del centro de la circunferencia.

    (a) Usar el Teorema de la función implícita para demostrar que el toro es una superficie regular.

    (b) Probar que la siguiente es una parametrización de un toro:

    $$\varphi(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u),$$

    donde $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$.

13. *Superficies de revolución.*

    Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, inyectiva y con inversa continua tal que su imagen no corta a una recta R dada. Identificando $\mathbb{R}^2$ con el plano $x = 0$ en $\mathbb{R}^3$ y haciendo rotar a α alrededor de R se obtiene un conjunto S llamado *superficie de revolución generada por* α.

    (a) Hacer varios dibujos como ejemplos.

    (b) Probar que S es en efecto una superficie regular hallando sistemas de coordenadas.

    (c) Definir meridianos y paralelos y calcular sus longitudes.

    (d) Extender la definición de superficie de revolución para incluir a la esfera y al toro.

14. *Superficies regladas.*

Una superficie se dice *reglada* si es generada por una familia de rectas o segmentos de recta que se mueven diferenciablemente sobre una curva. Estas superficies admiten una parametrización como sigue. Sean $\beta, \gamma : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curvas regulares. Entonces la imagen de $\varphi(u, v) = \beta(u) + v\gamma(u)$ o $\varphi(u, v) = \beta(v) + u\gamma(v)$ es una *superficie reglada*, con β su curva base y γ su directriz.

(a) Mostrar que la silla de montar $M : z = xy$, está doblemente reglada, es decir hay dos parametrizaciones regladas distintas con distintos rayos.

(b) Un *cono* es una superficie reglada con una parametrización de la forma

$$\varphi(u, v) = p + v\gamma(u).$$

Mostrar que la regularidad de φ es equivalente a que v y $\gamma \times \gamma'$ nunca sean nulos.

(c) Un *cilindro* es una superficie reglada con una parametrización de la forma

$$\varphi(u, v) = \beta(u) + vq.$$

Mostrar que la regularidad de φ es equivalente a que $\beta' \times q$ nunca sea nulo.