GEOMETRÍA DIFERENCIAL - 2012

Práctico 4

1. Sea S una superficie regular y sea $\pi : S \to \mathbb{R}^2$ la función que lleva a cada punto $(x, y, z) \in S$ al punto (x, y). ¿Es la función π diferenciable?

2. Probar que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo a un plano.

3. Sean S una superficie regular, $p \in S$ y $f, g : S \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en p. Demostrar que $f + g$ y $f \cdot g$ son funciones diferenciables en p. Demostrar además que si $f(p) \neq 0$ entonces $1/f$ es diferenciable en p.

4. Sea S una superficie regular y p_0 un punto fuera de S. Demostrar que $d(p) = |p - p_0|$ es una función diferenciable de S en $\mathbb{R}$.

5. Consideremos la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y el elipsoide $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$.
   (a) Mostrar que la aplicación antipodal A de S^2, $A(x) = -x$, es un difeomorfismo.
   (b) Probar que S^2 y E son difeomorfas.

6. Sean $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$. Probar que S_1 y S_2 son superficies regulares difeomorfas.

7. Probar que la relación "S_1 es difeomorfa a S_2" es una relación de equivalencia en el conjunto de superficies regulares.

8. Mostrar que la definición de función diferenciable en una superficie S, es equivalente a la siguiente: $f : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $p \in S$ si f es la restricción a S de una función diferenciable definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a p.

9. Sea S una superficie dada implícitamente por $f(x, y, z) = 0$, con 0 un valor regular de f. Mostrar que el plano tangente en $(x_0, y_0, z_0) \in S$ está dado por:
$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

10. Mostrar que los planos tangentes de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en los puntos $(x, y, 0)$ son todos paralelos al eje z.

11. Sea S una superficie regular y p_0 un punto fuera de S. Demostrar que $f(p) = |p - p_0|^2$ es una función diferenciable de S en $\mathbb{R}$ y mostrar que $(df)_p(w) = 2\langle w, p - p_0\rangle$.

12. Probar que si $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es lineal y S es una superficie invariante por L, entonces la restricción de L a S es diferenciable y $(dL)_p(w) = L(w)$, para todo $p \in S$ y $w \in T_pS$.

13. Sean S^2 la esfera unitaria centrada en el origen y $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 = 1\}$ (hiperboloide de una hoja). Denotamos con N y S respectivamente los puntos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$ y definimos $F : S^2 - \{N, S\} \to M$ de la siguiente manera: para cada $p \in S^2$ distinto de N y S, $F(p)$ es el punto donde corta a M la recta que pasa por p perpendicular al eje z.

(a) Demostrar que F es diferenciable.

(b) Dados $p = (1, 0, 0)$, $q = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, calcular la matriz de $(dF)_p$ y $(dF)_q$ con respecto a alguna base de los planos tangentes de salida y llegada.

14. Sean $f : S_1 \to S_2$ y $g : S_2 \to S_3$ dos funciones diferenciables en p y $f(p)$ respectivamente. Mostrar que $g \circ f$ es diferenciable en p y que vale la regla de la cadena:

$$d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p.$$

15. Sea S una superficie regular y $f : S \to \mathbb{R}$. Un punto $p \in S$ se dice crítico para f si $(df)_p = 0$.

(a) Sea $f(p) = |p - p_0|$ con p_0 fuera de S. Mostar que p es crítico para f si y sólo si la recta que pasa por p y p_0 es perpendicular a S en p.

(b) Sea $h(p) = \langle p, v \rangle$ con v un vector unitario. Mostar que p es crítico para f si y sólo v es perpendicular a S en p.

16. Mostrar que si todos los puntos de una superficie conexa son puntos críticos de una función f, entonces f es constante.

17. Mostrar que si todas las rectas normales a una superficie conexa pasan por un punto fijo, entonces la superficie está contenida en una esfera.

18. Mostrar que si todas las rectas normales a una superficie conexa cruzan una recta fija, entonces la superficie es de revolución.