GEOMETRÍA DIFERENCIAL - 2012

Práctico 5

1. Calcular la primera forma fundamental de las siguientes parametrizaciones de superficies regulares (en dominios apropiados):

   (a) el elipsoide $\mathbf{x}(u,v) = (a \operatorname{sen} u \cos v, b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c \cos u)$,

   (b) el paraboloide elíptico $\mathbf{x}(u,v) = (au \cos v, bu \operatorname{sen} v, u^2)$,

   (c) el paraboloide hiperbólico (silla de montar) $\mathbf{x}(u,v) = (au \cosh v, bu \operatorname{senh} v, u^2)$,

   (d) el hiperboloide de dos hojas $\mathbf{x}(u,v) = (a \operatorname{senh} u \cos v, b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, c \cosh u)$,

   (e) la esfera unitaria parametrizada por la proyección estereográfica.

   ¿Cuáles de estas parametrizaciones son ortogonales?

2. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable, $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, y sea S el gráfico de f, es decir $S = \{(u,v,f(u,v)) : (u,v) \in U\}$.

   (a) Hallar los coeficientes de la primera forma fundamental de S respecto del sistema coordenado canónico.

   (b) Probar que el área de una región acotada R de S es igual a

   $$\int\int_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy,$$

   donde Q es la proyección ortogonal de R sobre el plano xy.

3. Calcular el área de la esfera de radio r y del cilindro de radio r y altura h.

4. Sea $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ una curva regular en el plano con $\gamma_1(t) > 0$ para todo t en un cierto intervalo abierto I. Si

   - $I = (0,a)$ y γ es inyectiva con inversa continua, o bien
   - $I = \mathbb{R}$ y γ es periódica de período a e inyectiva en $[0,a)$,

   entonces
   $$S = \{(\gamma_1(t)\cos\theta, \gamma_1(t)\operatorname{sen}\theta, \gamma_2(t)) : t \in I, \theta \in \mathbb{R}\}$$
   es una superficie regular, llamada superficie de revolución con curva generatriz γ.

   (a) Encontrar dos (o cuatro) sistemas coordenados que cubran a S, y calcular los coeficientes de la primera forma fundamental respecto de uno de ellos.

   (b) Si γ tiene rapidez unitaria, mostrar que el área de S es $2\pi \int_0^a \gamma_1(s)\, ds$.

   (c) Hallar el área del toro de revolución con curva generatriz $\gamma(s) = (2 + \cos s, \operatorname{sen} s)$.

5. Sea S una superficie regular y $f : S \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. La función $\nabla f : S \to \mathbb{R}^3$ que a cada $p \in S$ le asigna el vector $\nabla f(p) \in T_pS$ definido por

$$\langle \nabla f(p), v \rangle_p = (df)_p(v) \quad \text{para todo } v \in T_pS$$

se llama el *gradiente* de f.

(a) Si E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental de una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, probar que

$$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2}\mathbf{x}_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2}\mathbf{x}_v.$$

En particular, si $S = \mathbb{R}^2$ entonces $\nabla f = f_x e_1 + f_y e_2$, con $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(b) Mostrar que si $v \in T_p(S)$ varía entre los vectores de longitud 1 de T_pS, entonces $(df)_p(v)$ es máximo si y sólo si $v = \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$.

(c) Si $\nabla f \neq 0$ en todos los puntos de la curva de nivel $C = \{q \in S : f(q) = c\}$, probar que C es una curva regular en S y $\nabla f(q)$ es normal a C en todo $q \in C$.

6. Sea A un abierto de $\mathbb{R}^3$ y sea a un valor regular de la función diferenciable $f : A \to \mathbb{R}$. Probar que la superficie $f^{-1}(a)$ es orientable.

7. Sea S una superficie regular. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) S tiene un campo normal continuo nunca nulo.

(b) S tiene un campo normal diferenciable nunca nulo.

8. Sea S una superficie regular que se puede cubrir con dos entornos coordenados V_1 y V_2 tales que $V_1 \cap V_2$ tiene dos componentes conexas.

(a) Mostrar que si el jacobiano del cambio de coordenadas es o bien positivo o bien negativo en ambas componentes, entonces S es orientable.

(b) Mostrar que si el jacobiano del cambio de coordenadas es positivo en una componente y negativo en la otra, entonces S no es orientable.

9. Sean S_1 y S_2 superficies regulares.

(a) Sea $f : S_1 \to S_2$ un difeomorfismo local. Probar que si S_2 es orientable entonces S_1 es orientable.

(b) Sea $f : S_1 \to S_2$ un difeomorfismo. Probar que S_1 es orientable si y sólo si S_2 lo es.