GEOMETRÍA DIFERENCIAL - 2012

Práctico 6

1. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$, sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, y sea S la superficie regular definida por su gráfico.

   (a) Mostrar que

   $$N(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}}(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$$

   es normal a S en $(x, y, f(x, y))$.

   (b) Para cada una de las siguientes funciones, definidas en su dominio, sea S la superficie definida por su gráfico. Hallar en cada caso las direcciones principales, las curvaturas principales y las direcciones asintóticas (si existen) en el punto $p = (0, 0, 0)$. Calcular en cada caso la curvatura gaussiana y la curvatura media en p y decir qué tipo de punto es p.

   (i) $f(x,y) = axy$, (ii) $f(x,y) = (x+y)^2$, (iii) $f(x,y) = x^4 + y^4$.

2. Considerar el helicoide parametrizado por $\varphi(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, bv)$, con $b \neq 0$. Calcular:

   (a) Las primera y segunda formas fundamentales.

   (b) La curvatura media y la curvatura gaussiana.

   (c) Las curvas asintóticas y las líneas de curvatura.

3. Sea M la superficie de Enneper, parametrizada por:

   $$\varphi(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right).$$

   Probar que:

   (a) Los coeficientes de la primera forma fundamental son: $E = G = (1+u^2+v^2)^2$ y $F = 0$.

   (b) Los coeficientes de la segunda forma fundamental son $e = 2$, $g = -2$ y $f = 0$.

   (c) Las curvaturas principales son $k_1 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$ y $k_2 = \frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$.

   (d) Las líneas de curvatura son las rectas coordenadas.

   (e) Las curvas asintóticas son $u + v = \text{cte}$ y $u - v = \text{cte}$.

4. Mostrar que en un punto hiperbólico, las direcciones principales son bisectrices de las direcciones asintóticas.

5. Mostrar que la suma de las curvaturas normales para cada par de direcciones ortogonales, en un punto $p \in S$, es constante.

6. Mostrar que si una superficie es tangente a un plano a lo largo de una curva, entonces los puntos de la curva son parabólicos o planares.

7. Describir la región de la esfera unidad que es cubierta por la imagen de la aplicación de Gauss de las siguientes superficies:

   (a) El paraboloide de revolución: $z = x^2 + y^2$.

   (b) El hiperboloide de revolución: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

   (c) La catenoide: $x^2 + y^2 = \cosh^2 z$.

8. Sea $C \subset S$ una curva regular en una superficie S con curvatura gaussiana $K > 0$. Mostrar que la curvatura κ de C en p satisface

$$\kappa \geq \min(|k_1|, |k_2|),$$

   donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales de S en p.

9. Sea $\alpha : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^2$ la curva dada por $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t + \log(\operatorname{tg}(t/2)))$. Esta curva se llama tractriz. Sea S la superficie de revolución que se obtiene al rotar esta curva alrededor del eje y. Mostrar que la curvatura gaussiana de S es constantemente -1.

10. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación dada por $F(p) = \lambda p$ con λ una constante positiva. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y denotemos $\overline{S} = F(S)$. Probar que $\overline{S}$ es una superficie regular, y determinar fórmulas que relacionen las curvaturas gaussiana y media, K y H, de S con las curvaturas gaussiana y media, $\overline{K}$ y $\overline{H}$, de $\overline{S}$.

11. Considerar la superficie regular S obtenida al rotar la curva $y = x^3$, $-1 < x < 1$, alrededor de la recta $y = 1$. Probar que los puntos obtenidos por la rotación del punto $(0, 0)$ de la curva son puntos parabólicos de S.

12. Mostrar que si la curvatura media es 0 en un punto no planar, entonces este punto tiene dos direcciones ortogonales asintóticas.

13. Dar un ejemplo de una superficie con un punto parabólico aislado.